



DISTRIBUSI POWER GOMPERTZ-MAKEHAM: SIFAT-SIFAT STATISTIKA DAN APLIKASINYA

Moch. Taufik Hakiki¹, Hairul Umam²

Corresponding author : Moch. Taufik Hakiki

¹Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya, Jawa Timur, 60111, moch.taufik22@its.ac.id

²Institut Agama Islam Tazkia, Bogor, Jawa Barat, 16810, hairul@nplecturer.tazkia.ac.id

Received : 21 Juli 2023, Revised : 30 September 2023, Accepted : 2 Oktober 2023

Abstract

In this article, we introduce and studied the power Gompertz-Makeham (PGM) distribution with four parameters. This distribution obtained using power transformation on Gompertz-Makeham distribution. On this new distribution, we derive its statistical properties, such as quantile function, moment, and incomplete moment along with their implications. We present all statistical properties in closed-form formula so that their computation could be easily done. Then, on this new distribution, we did parameter estimation by maximum likelihood estimation using simulated data and examine the performance of MLE. The proposed model applied to real-life datasets of carbon-fiber braking stress to demonstrate the flexibility of PGM distribution.

Keywords: Gompertz-Makeham, Maximum likelihood estimation method, power transformation

Abstrak

Pada artikel ini, kami memperkenalkan distribusi *power* Gompertz-Makeham (PGM) dengan empat parameter. Distribusi ini didapat melalui transformasi *power* pada distribusi Gompertz-Makeham. Pada distribusi baru ini, pertama kami turunkan beberapa sifat statistika dari distribusi PGM, seperti fungsi kuantil, momen, dan momen tak lengkap, serta beberapa akibat dari sifat tersebut. Semua sifat tersebut disajikan dalam bentuk tertutup yang dapat mempermudah proses komputasi pada sifat tersebut. Pada distribusi baru ini, kemudian kami lakukan estimasi parameter menggunakan *maximum likelihood estimation (MLE)*, pertama pada data simulasi untuk mengukur performa MLE pada distribusi PGM, dan selanjutnya pada data kekuatan fiber karbon untuk mendemonstrasikan fleksibilitas distribusi *power* Gompertz-Makeham.

Kata kunci: Gompertz-Makeham, Metode maximum likelihood estimation, Transformasi power

1. Pendahuluan

Pada 1825, Gompertz memberikan postulat terkait tingkat kematian manusia, yang kemudian dikenal sebagai hukum Gompertz. Hukum ini kemudian diperluas oleh Makeham pada 1860. Dua hukum tersebut kemudian melahirkan distribusi Gompertz dan distribusi Gompertz-Makeham, yang memiliki aplikasi utamanya pada bidang aktuaria, biologi, dan demografi, karena kekuatannya dalam memodelkan pola pada tingkat mortalita pada berbagai spesies, termasuk manusia. Detail mengenai sejarah

hukum Gompertz dan Gompertz-Makeham beserta sifat-sifat dasarnya dapat dilihat di Marshall dan Olkin [1].

Distribusi Gompertz-Makeham memiliki fungsi distribusi kumulatif

$$G(y) = 1 - \exp \left[-\lambda y - \frac{\alpha}{\beta} (e^{\beta y} - 1) \right] \quad (1)$$

dan fungsi kepadatan peluang

$$g(y) = (\alpha e^{\beta x} + \lambda) \times \exp \left[-\lambda x - \frac{\alpha}{\beta} (e^{\beta x} - 1) \right] \quad (2)$$

dengan $0 \leq y < \infty$ dan $\alpha, \beta > 0, \lambda \geq 0$ merupakan parameter bentuk (lihat, sebagai contoh, [1]). Distribusi Gompertz merupakan kasus khusus dari distribusi Gompertz-Makeham, yang diperoleh ketika $\lambda = 0$. Distribusi Gompertz-Makeham memiliki sifat bahwa fungsi *hazard rate* bersifat menaik. Meskipun hal ini cocok dengan sifat mortalita manusia, tetapi tidak semua data memiliki *hazard rate* yang selalu meningkat seiring waktu. Karakteristik data yang semakin bervariasi memicu penelitian dalam konstruksi distribusi parametrik baru yang lebih fleksibel dalam memodelkan data dengan berbagai karakteristik.

Pembahasan, pengembangan dan modifikasi dari distribusi Gompertz dan Gompertz-Makeham telah dilakukan oleh banyak penulis. Dey dkk. di [2] dan Castellares dkk. di [3] membahas sifat-sifat distribusi Gompertz-Makeham. Di [4], [5], dan [6] dibahas pengembangan distribusi baru berdasarkan distribusi Gompertz dan Gompertz-Makeham. Membangun distribusi baru berdasarkan distribusi tertentu dapat dilakukan dengan berbagai cara, salah satunya melalui transformasi *power* $X = Y^{1/\theta}$ dengan $\theta > 0$ dengan Y adalah peubah acak yang menjadi landasan dengan *support* tak negatif. Transformasi *power* dapat memberikan kontrol pada grafik fungsi kepadatan dari X di sekitar 0. Hal ini dapat meningkatkan fleksibilitas dari distribusi baru dalam memodelkan data dibandingkan distribusi semulanya. Distribusi baru yang dibangun melalui transformasi *power* pada distribusi klasik juga telah banyak dibahas. Sebagai contoh paling sederhana, distribusi Weibull merupakan hasil transformasi *power* dari distribusi eksponensial. Contoh lain dari penelitian yang telah dilakukan adalah distribusi *power* Lomax [7], distribusi *power* Rayleigh [8], distribusi *power* Lindley [9], [10], dan distribusi *power* Gompertz [11].

Pada artikel ini, kami memperkenalkan distribusi *power* Gompertz-Makeham, yang diperoleh melalui transformasi *power* pada distribusi Gompertz-Makeham, kemudian kami pelajari sifat-sifat statistika dari distribusi baru ini. Demonstrasi penerapan distribusi *power* Gompertz-Makeham dalam memodelkan data riil juga dibahas.

2. Metode

Misalkan Y peubah acak kontinu yang memiliki *support* $[0, \infty)$ dengan fungsi distribusi $G(y)$ dan fungsi densitas $g(y)$. Jika ϕ adalah fungsi injektif dan terturunkan pada $[0, \infty)$ dan $X = \phi(Y)$, maka fungsi distribusi dan fungsi kepadatan peluang dari X berturut-turut adalah

$$F(x) = G(\phi^{-1}(y)), \quad (3)$$

$$f(x) = g(\phi^{-1}(y)) \left| \frac{d\phi^{-1}(y)}{dy} \right| \quad (4)$$

Pada penelitian ini, kami menerapkan tranformasi *power* $\phi(u) = u^{1/\theta}$, $0 < u < \infty$, pada peubah acak Y yang berdistribusi Gompertz-Makeham (disingkat GM). Peubah acak hasil transformasinya, yaitu $X = \phi(Y) = Y^{1/\theta}$ kami katakan berdistribusi *power* Gompertz-Makeham (disingkat PGM). Fungsi distribusi serta densitas dari PGM dapat diperoleh dari persamaan (2) dan (3).

Hal pertama yang dibahas pada artikel ini adalah menurunkan beberapa sifat statistik dari distribusi PGM, seperti fungsi kuantil, momen, dan momen tak lengkap. Setelah mendapatkan fungsi distribusi $F(x)$ dan fungsi densitas $f(x)$ dari distribusi PGM, maka kami bisa mendapatkan sifat-sifat statistiknya. Hasil-hasil tersebut diformulasikan dalam bentuk tertutup sehingga memungkinkan untuk diilustrasikan secara numerik.

Pada bagian penerapan, pertama kami melakukan estimasi parameter dengan metode *maximum likelihood estimation* (MLE) pada data simulasi. Ini untuk menguji performa MLE dalam melakukan estimasi pada distribusi PGM. Proses simulasi dilakukan sebagai berikut.

- 1) Menetapkan nilai parameter distribusi PGM
- 2) Membangkitkan sebanyak n bilangan acak u_k yang berdistribusi seragam pada $(0, 1)$. Nilai n akan divariasikan.
- 3) Membangkitkan data berukuran n yang berdistribusi PGM dengan menghitung $x_k = Q(u_k)$, $k = 1, 2, \dots, n$. Di sini, $Q(p)$, $0 < p < 1$, adalah fungsi kuantil dari PGM berdasarkan parameter pada langkah 1.

- 4) Menerapkan MLE pada data yang diperoleh di langkah 3).
- 5) Mereplikasi langkah 2) sampai langkah 4) sebanyak 1000 kali.

Estimasi parameter dengan MLE pada langkah 4) dilakukan dengan mencari vektor parameter η yang memaksimalkan fungsi log-likelihoodnya. Dari hasil estimasi parameter yang diperoleh, kemudian kami hitung rata-rata, bias, dan rata-rata kuadrat error. Selanjutnya, proses *fitting* distribusi melalui MLE dilakukan pada data riil, yakni data kekuatan fiber karbon. Hasil yang didapat kemudian dan dibandingkan dengan distribusi parameterik lainnya, termasuk distribusi yang mendasari PGM, yakni distribusi Gompertz dan Gompertz-Makeham. Perbandingan dilakukan dengan melihat statistik AIC, BIC, dan HQIC. Seluruh komputasi dilakukan menggunakan perangkat lunak Python.

3. Pembahasan

3.1 Definisi Distribusi PGM

Peubah acak X berdistribusi PGM jika $X = Y^{1/\theta}$, dengan $\theta > 0$ dan Y berdistribusi GM. Dengan menggunakan formula (3) dan (4) serta fungsi kepadatan peluang dan fungsi distribusi distribusi GM di persamaan (1) dan (2), fungsi kepadatan peluang dari X adalah

$$f(x) = \theta x^{\theta-1} \left(\alpha e^{\beta x^\theta} + \lambda \right) \times \exp \left[-\lambda x^\theta - \frac{\alpha}{\beta} \left(e^{\beta x^\theta} - 1 \right) \right] \quad (5)$$

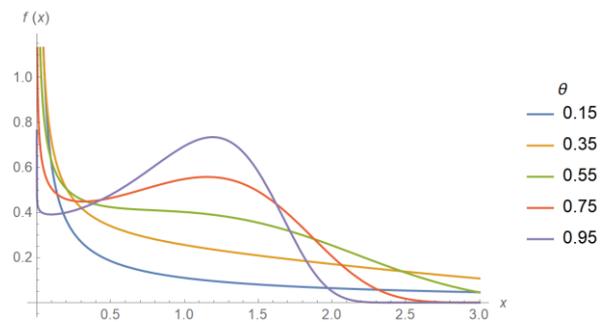
dan fungsi distribusi kumulatif dari X adalah

$$F(x) = 1 - \exp \left[-\lambda x^\theta - \frac{\alpha}{\beta} \left(e^{\beta x^\theta} - 1 \right) \right] \quad (6)$$

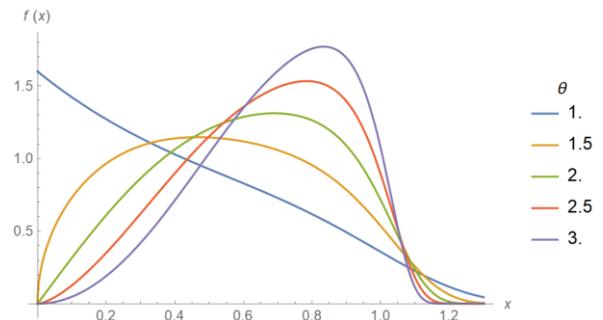
dengan $0 \leq x < \infty$ dan $\theta, \alpha, \beta > 0, \lambda \geq 0$. Jika X berdistribusi PGM, kami tuliskan $X \sim \text{PGM}(\alpha, \beta, \lambda, \theta)$. Beberapa distribusi yang termuat dalam distribusi PGM di antaranya:

- Distribusi Gompertz-Makeham ($\theta = 1$) dan distribusi Gompertz ($\theta = 1, \lambda = 0$).
- Distribusi *power* Gompertz (PGo) ($\lambda = 0$). Distribusi ini telah diperkenalkan dan dipelajari oleh Ieren dkk. [11].
- Distribusi Chen ($\lambda = 0$ dan $\beta = 1$) [12].

Grafik fungsi kepadatan dari distribusi PGM untuk beberapa nilai parameter dapat dilihat pada Gambar 1.



Gambar 1. Grafik $f(x)$ untuk $\alpha = 0,1, \beta = 2,5, \lambda = 0,25$ dan beberapa nilai θ



Gambar 2. Grafik $f(x)$ untuk $\alpha = 0,2, \beta = 3,2, \lambda = 1,4$ dan beberapa nilai θ

Pada Gambar 1, terlihat bahwa fungsi $f(x)$ dari PGM mendekati tak terhingga ketika x mendekati 0 untuk $0 < \theta < 1$. Di lain pihak, pada Gambar 2 terlihat bahwa $f(x)$ mendekati 0 ketika x mendekati 0 untuk $\theta > 1$, sedangkan untuk $\theta = 1$, fungsi $f(x)$ bernilai hingga di $x = 0$. Karakteristik fungsi kepadatan peluang dari PGM tersebut dirangkum pada proposisi berikut.

Proposisi 1. Fungsi kepadatan peluang dari distribusi $\text{PGM}(\alpha, \beta, \lambda, \theta)$ memiliki sifat:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \begin{cases} \infty, & 0 < \theta < 1, \\ \alpha + \lambda, & \theta = 1 \\ 0, & 1 < \theta < \infty \end{cases} \quad (7)$$

Bukti. Dengan menggunakan sifat $e^x \sim 1 + x$ ketika $x \rightarrow 0$, maka

$$f(x) \sim \theta x^{\theta-1} (\alpha + \lambda + \alpha \beta x^\theta) e^{-(\alpha+\lambda)x^\theta}$$

ketika $x \rightarrow 0$. Dari sini, kesimpulan sudah bisa mengikuti. ■

Dari Proposisi 1, bisa disimpulkan juga bahwa modus dari distribusi PGM ada jika dan hanya jika $\theta \geq 1$.

Fungsi kesintasan (*survival function*) dan fungsi *hazard* dari PGM($\alpha, \beta, \lambda, \theta$), berturut-turut diberikan oleh

$$S(x) = \exp \left[-\lambda x^\theta - \frac{\alpha}{\beta} (e^{bx^\theta} - 1) \right], \quad (8)$$

$$h(x) = \frac{f(x)}{S(x)} = \theta x^{\theta-1} (\alpha e^{bx^\theta} + \lambda). \quad (9)$$

Fungsi *hazard* dari distribusi PGM memiliki kaitan dengan distribusi *power* Gompertz dan Weibull. Persisnya, misalkan suatu sistem terdiri dari dua komponen yang memiliki sifat:

- waktu hidup komponen pertama mengikuti distribusi *power* Gompertz dengan parameter α, β, θ ,
- waktu hidup komponen kedua mengikuti distribusi Weibull dengan parameter λ, θ , dan
- sistem ini gagal/berhenti ketika satu dari dua komponen tersebut berhenti untuk yang pertama kalinya,

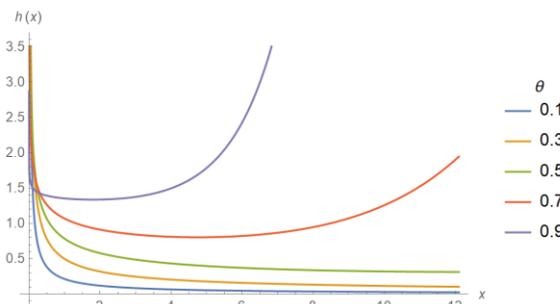
maka waktu hidup sistem mengikuti distribusi PGM($\alpha, \beta, \lambda, \theta$).

Dengan cara yang sama seperti pada pembuktian Proposisi 1, kami mendapatkan sifat asimtotik dari fungsi *hazard* yang diberikan pada Proposisi 2.

Proposisi 2. Fungsi *hazard* dari distribusi PGM($\alpha, \beta, \lambda, \theta$) memenuhi $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = \infty$ dan

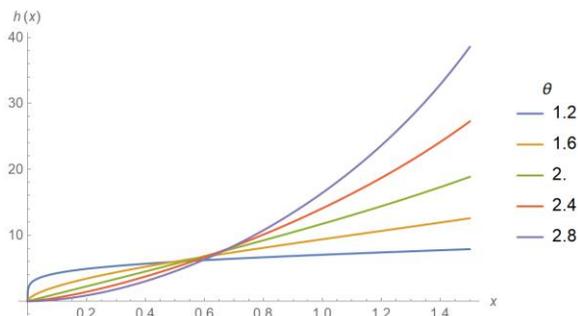
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \begin{cases} \infty, & 0 < \theta < 1, \\ \alpha + \lambda, & \theta = 1 \\ 0, & 1 < \theta < \infty \end{cases} \quad (10)$$

Proposisi 2 juga menunjukkan bahwa fungsi *hazard* memiliki dua kemungkinan bentuk, yakni *bathtub* (untuk $0 < \theta < 1$) atau menaik (untuk $\theta \geq 1$).



Gambar 3. Grafik $h(x)$ untuk $\alpha = 0,4, \beta = 1,7, \lambda = 0,6$ dan beberapa nilai θ

Fungsi *hazard* berbentuk *bathtub* jika grafik $h(x)$ diawali dengan penurunan, kemudian cenderung konstan, dan dilanjutkan dengan kenaikan, seperti diperlihatkan pada Gambar 3. Pada Gambar 4, grafik $h(x)$ selalu naik seiring dengan nilai x .



Gambar 4. Grafik $h(x)$ untuk $\alpha = 1,2, \beta = 0,2, \lambda = 4,4$ dan beberapa nilai θ

3.2 Sifat-Sifat Statistik dari PGM

3.2.1 Fungsi Kuantil

Fungsi kuantil $Q(x)$, dengan $0 < x < 1$, dari distribusi yang memiliki fungsi distribusi $F(x)$ didefinisikan sebagai nilai u yang memenuhi persamaan $F(u) = x$. Pertama, kami tuliskan dahulu definisi cabang utama fungsi Lambert-W. Fungsi W_0 adalah cabang utama fungsi Lambert-W jika $W_0(z)e^{W_0(z)} = z$ untuk setiap $z \geq -1/e$. Fungsi kuantil distribusi PGM adalah sebagai berikut.

Teorema 1. Untuk $\lambda > 0$ dan $0 < x < 1$, fungsi kuantil dari $X \sim \text{PGM}(\alpha, \beta, \lambda, \theta)$ adalah

$$Q(x) = \left[\frac{\alpha}{\beta\lambda} - \frac{1}{\lambda} \ln(1-x) - \frac{1}{\beta} W_0 \left(\frac{\alpha}{\lambda} e^{\frac{\alpha}{\lambda}} (1-x)^{-\frac{\beta}{\lambda}} \right) \right]^{\frac{1}{\theta}} \quad (11)$$

Bukti. Jodra di [13] telah membuktikan bahwa fungsi kuantil dari distribusi GM adalah

$$Q(x) = \frac{\alpha}{\beta\lambda} - \frac{1}{\lambda} \ln(1-x) - \frac{1}{\beta} W_0 \left(\frac{\alpha}{\lambda} e^{\frac{\alpha}{\lambda}} (1-x)^{-\frac{\beta}{\lambda}} \right)$$

dengan $0 < x < 1$. Misalkan $Q(x)$ adalah fungsi kuantil dari distribusi PGM. Jika $Q(x) = u$, maka $x = G(u)$ dengan G adalah fungsi distribusi Gompertz-Makeham di (1). Karena fungsi distribusi PGM memenuhi

$F(u^{1/\theta}) = G(u)$, jadi $Q(x) = (Q(x))^{1/\theta}$, sesuai dengan formula (1). ■

Dengan Teorema 1, sekarang bisa didapatkan kuantil-kuantil penting seperti kuartil pertama, kedua, dan ketiga. Sebagai contoh, dengan substitusi $x = \frac{1}{2}$, diperoleh median dari distribusi PGM, yaitu

$$Q\left(\frac{1}{2}\right) = \left[\frac{\alpha + \beta \ln 2}{\beta \lambda} - \frac{1}{\beta} W_0 \left(\frac{\alpha (e^{\alpha 2\beta})^{1/\lambda}}{\lambda} \right) \right]^{\frac{1}{\theta}} \quad (12)$$

3.2.2 Momen

Sebelum membahas formula untuk momen distribusi PGM, kami tuliskan terlebih dahulu fungsi integro-exponential diperumum $E_s^p(z)$ untuk $p > -1$, dan $s, z \in \mathbb{C}$, yang didefinisikan sebagai

$$E_s^p(z) = \frac{1}{\Gamma(p+1)} \int_1^\infty (\ln x)^p x^{-s} e^{-zx} dx \quad (13)$$

dengan $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$, $\text{Re}(z) > 0$, merupakan fungsi gamma. Fungsi integro-eksponensial dipelajari untuk pertama kalinya oleh Milgram [14], termasuk konvergensi integralnya. Formula untuk momen distribusi PGM disajikan pada teorema berikut.

Teorema 2 Momen ke- k , $k \in \mathbb{N}$, dari distribusi $\text{PGM}(\alpha, \beta, \lambda, \theta)$ adalah

$$E[X^k] = \frac{e^{\frac{\alpha}{\beta}}}{\beta^{\frac{k}{\theta}}} \Gamma\left(\frac{k}{\theta} + 1\right) E_{\lambda/\theta+1}^{k/\theta-1}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) \quad (14)$$

Bukti. Berdasarkan definisi momen,

$$\begin{aligned} E[X^k] &= \int_0^\infty x^k f(x) dx \\ &= \theta e^{\frac{\alpha}{\beta}} \int_0^\infty x^{k+\theta-1} \left(\alpha e^{\beta x^\theta} + \lambda \right) \times \\ &\quad \exp\left[-\lambda x^\theta - \frac{\alpha}{\beta} e^{\beta x^\theta}\right] dx \end{aligned}$$

Dengan substitusi $u = e^{\beta x^\theta}$, dan dengan memperhatikan definisi $E_s^p(z)$ di persamaan (13), maka integral terakhir menjadi

$$\begin{aligned} E[X^k] &= \frac{e^{\frac{\alpha}{\beta}}}{\beta^{\frac{k}{\theta}}} \Gamma\left(\frac{k}{\theta} + 1\right) \times \\ &\quad \left[\frac{\alpha}{\beta} E_{\lambda/\beta}^{k/\theta}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) + \frac{\lambda}{\beta} E_{\lambda/\beta+1}^{k/\theta}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) \right] \end{aligned} \quad (15)$$

Jika $\lambda > 0$, gunakan relasi rekursif

$$(1-s)E_s^p(z) = zE_{s-1}^p(z) - E_s^{p-1}(z)$$

yang berlaku untuk setiap $p > 0$, $s \neq 1$, dan $z > 0$ [14]. Dengan menerapkan relasi rekursif tersebut untuk $p = k/\theta$, $s = \lambda/b + 1$, dan $z = \lambda/b$, ruas kanan dari persamaan (14) menjadi

$$E[X^k] = \frac{e^{\frac{\alpha}{\beta}}}{\beta^{\frac{k}{\theta}}} \Gamma\left(\frac{k}{\theta} + 1\right) E_{\lambda/\theta+1}^{k/\theta-1}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right).$$

Jika $\lambda = 0$, kesamaan (15) menjadi

$$E[X^k] = \frac{e^{\frac{\alpha}{\beta}} \alpha}{\beta^{\frac{k}{\theta}+1}} \int_1^\infty (\ln u)^{\frac{k}{\theta}} e^{-\frac{\alpha}{\beta} u} du.$$

Dengan integrasi parsial, diperoleh

$$\begin{aligned} E[X^k] &= \frac{e^{\frac{\alpha}{\beta}}}{\beta^{\frac{k}{\theta}}} \frac{k}{\theta} \int_1^\infty (\ln u)^{\frac{k}{\theta}-1} u^{-1} e^{-\frac{\alpha}{\beta} u} du \\ &= \frac{e^{\frac{\alpha}{\beta}}}{\beta^{\frac{k}{\theta}}} \Gamma\left(\frac{k}{\theta} + 1\right) E_1^{k/\theta-1}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Dengan formula $E[X^k]$ di Teorema 2, kami mendapatkan formula tertutup untuk mean dan variansi dari $X \sim \text{PGM}(\alpha, \beta, \lambda, \theta)$, yaitu

$$\mu = E[X] = \frac{e^{\frac{\alpha}{\beta}}}{\beta^{\frac{1}{\theta}}} \Gamma_{1/\theta} E_{\lambda/\theta+1}^{1/\theta-1}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) \quad (16)$$

dan

$$\sigma^2 = \text{Var}(X) = E[X^2] - E[X]^2 \quad (17)$$

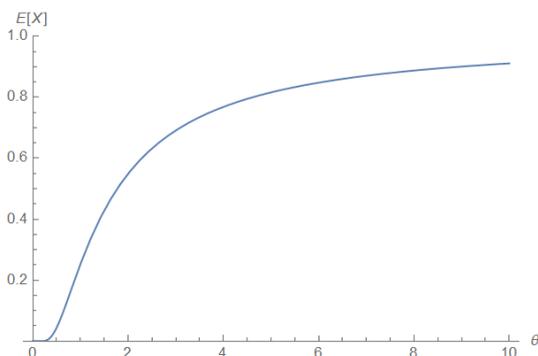
$$= \frac{\alpha e^{\frac{\alpha}{\beta}}}{\beta^{\frac{2}{\theta}+1}} \Gamma_{1/\theta} \left[\frac{\theta + 1}{\theta} E_{\lambda/\theta+1}^{2/\theta-1} \left(\frac{\alpha}{\beta} \right) - \frac{\alpha e^{\frac{\alpha}{\beta}}}{\beta} \Gamma_{1/\theta} \left(E_{\lambda/\theta+1}^{1/\theta-1} \left(\frac{\alpha}{\beta} \right) \right)^2 \right]$$

dengan $\Gamma_{1/\theta} = \Gamma(1/\theta + 1)$. Bentuk tertutup untuk *skewness* dan *kurtosis* dari $X \sim \text{PGM}(\alpha, \beta, \lambda, \theta)$ bisa didapat dari μ dan σ berdasarkan formula (15) dan (16) dan dengan menggunakan formula

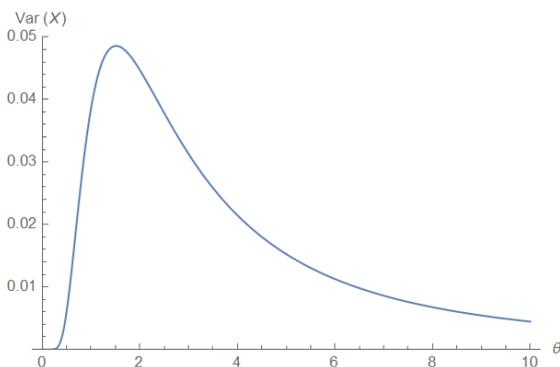
$$\text{Skew}(X) = \frac{E[X^3] - 3\mu\sigma^2 + 2\mu^3}{\sigma^3}$$

$$\text{Kurt}(X) = \frac{E[X^4] - 4\mu E[X^3] + 6\mu^2\sigma^2 + 3\mu^4}{\sigma^4}$$

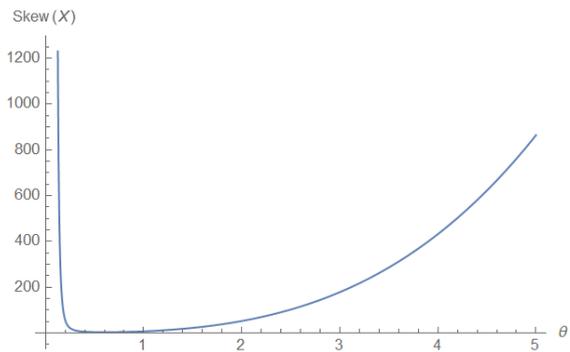
Dengan disajikannya momen dalam bentuk tertutup, kami bisa mengilustrasikan nilai mean, variansi, *skewness*, dan *kurtosis* dari distribusi PGM dengan mudah. Gambar 5, 6, 7, dan 8 memberikan ilustrasi dari nilai keempat statistik tersebut untuk $\alpha = 0,3$, $\beta = 4,7$, $\lambda = 0,6$ dan $\theta > 0$.



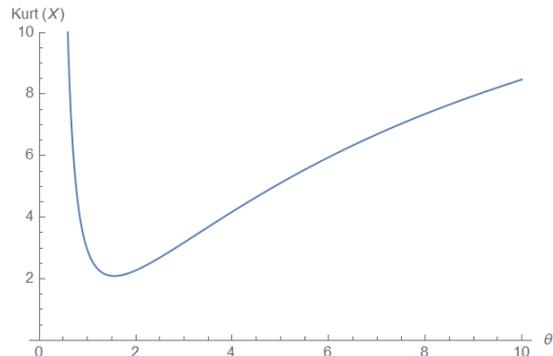
Gambar 5. Grafik $E[X]$ terhadap θ untuk $\alpha = 0,3$, $\beta = 4,7$, $\lambda = 0,6$



Gambar 6. Grafik $\text{Var}(X)$ terhadap θ untuk $\alpha = 0,3$, $\beta = 4,7$, $\lambda = 0,6$



Gambar 7. Grafik $\text{Skew}(X)$ terhadap θ untuk $\alpha = 0,3$, $\beta = 4,7$, $\lambda = 0,6$



Gambar 8. Grafik $\text{Kurt}(X)$ terhadap θ untuk $\alpha = 0,3$, $\beta = 4,7$, $\lambda = 0,6$

3.2.3 Momen Tak Lengkap

Momen tak lengkap ke- k dari peubah acak X dengan fungsi kepadatan $f(x)$ didefinisikan sebagai [15]

$$m_k(w) = \int_0^w x^k f(x) dx, \quad x < w.$$

Berdasarkan definisi ini, jelas bahwa $E[X]$ adalah limit dari $m_r(w)$ ketika $w \rightarrow \infty$. Momen tak lengkap dari distribusi PGM($\alpha, \beta, \lambda, \theta$) adalah sebagai berikut.

Teorema 3. Momen tak lengkap ke- k dari distribusi PGM($\alpha, \beta, \lambda, \theta$) adalah

$$m_k(w) = \frac{e^{\frac{\alpha}{\beta}}}{\beta^{\frac{k}{\theta}}} \Gamma\left(\frac{k}{\theta} + 1\right) E_{\lambda/\beta+1}^{k/\theta-1} \left(\frac{\alpha}{\beta}, e^{\beta w^\theta} \right) - w^k S(w). \quad (18)$$

untuk $k \in \mathbb{N}$. Dalam hal ini, $E_s^p(z, u)$, $u > 1$, $p > -1$, dan $s, z \in \mathbb{C}$ menyatakan fungsi integro-exponential diperumum tak lengkap yang didefinisikan sebagai

$$E_s^p(z, u) = \frac{1}{\Gamma(p+1)} \int_1^u (\ln x)^p x^{-s} e^{-zx} dx. \quad (19)$$

Bukti. Proses pembuktian ini serupa dengan penurunan momen ke- k di Teorema 2. Dengan menggunakan definisi momen tak lengkap, dilanjutkan dengan substitusi $u = e^{bw^\theta}$, diperoleh

$$m_k(w) = \frac{e^{\frac{\alpha}{\beta}}}{\beta^{\frac{k}{\theta}}} \Gamma\left(\frac{k}{\theta} + 1\right) \times \left[\frac{\alpha}{\beta} E_{\lambda/\beta}^{k/\theta}\left(\frac{\alpha}{\beta}, e^{bw^\theta}\right) + \frac{\lambda}{\beta} E_{\lambda/\beta+1}^{k/\theta}\left(\frac{\alpha}{\beta}, e^{bw^\theta}\right) \right] \quad (20)$$

Selanjutnya, kami menggunakan relasi rekursif berikut yang berlaku untuk setiap $p > 0$, $s \neq 1$, $z > 0$, dan $w > 1$:

$$(1-s)E_s^p(z, w) = zE_{s-1}^p(z, w) - E_s^{p-1}(z, w) + \frac{U(z, w)}{\Gamma_p}$$

dengan $U(z, w) = (\ln w)^p w^{-s+1} e^{-zw}$ dan $\Gamma_p = \Gamma(p+1)$. Relasi rekursif tersebut dapat dibuktikan dengan menerapkan integrasi parsial pada definisi $E_s^p(z, u)$. Jika $\lambda = 0$, kami terapkan relasi tersebut untuk $p = k/\theta$, $s = \lambda/b + 1$ dan $z = \lambda/b$ sehingga persamaan (19) menjadi

$$m_k(w) = \frac{e^{\frac{\alpha}{\beta}}}{\beta^{\frac{k}{\theta}}} \Gamma\left(\frac{k}{\theta} + 1\right) E_{\lambda/\beta+1}^{k/\theta-1}\left(\frac{\alpha}{\beta}, e^{\beta w^\theta}\right) - w^k S(w)$$

Jika $\lambda = 0$, sekali lagi kami menggunakan integrasi parsial pada persamaan (19) untuk mendapatkan

$$m_k(w) = \frac{e^{\frac{\alpha}{\beta}}}{\beta^{\frac{k}{\theta}}} \Gamma\left(\frac{k}{\theta} + 1\right) E_1^{k/\theta-1}\left(\frac{\alpha}{\beta}, e^{bw^\theta}\right) - w^k S(w). \quad \blacksquare$$

3.2.4 Kurva Lorenz dan Bonferroni

Kurva Lorenz dari peubah acak X didefinisikan sebagai [16]

$$L(F(x)) = \frac{m_1(x)}{E[X]},$$

Dengan menggunakan Teorema 2 dan formula ekspektasi di persamaan (16), kami peroleh teorema berikut.

Teorema 4. Kurva Lorenz dari distribusi $\text{PGM}(\alpha, \beta, \lambda, \theta)$ adalah

$$L(F(x)) = \frac{E_{\lambda/\beta+1}^{1/\theta-1}\left(\frac{\alpha}{\beta}, e^{\beta x^\theta}\right)}{E_{\lambda/\beta+1}^{1/\theta-1}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} - \frac{xS(x)}{\mu}. \quad (21)$$

Kurva Bonferroni dari peubah acak X bisa langsung dihitung dari kurva Lorenz [16]. Kurva Bonferroni dapat didefinisikan sebagai

$$B(F(x)) = \frac{L(F(x))}{F(x)}.$$

Kurva Lorenz dan Bonferroni banyak digunakan di ilmu ekonomi sebagai alat untuk mengukur sebaran pendapatan dan kekayaan masyarakat sehingga bisa diketahui seberapa besar ketimpangan ekonomi yang terjadi.

3.2.5 Ekspektasi Sisa Waktu Hidup

Ekspektasi sisa waktu hidup (*mean residual life*) menyatakan rata-rata waktu hingga kematian jika suatu entitas masih hidup pada waktu t . Persisnya, jika X adalah peubah acak yang menyatakan lama waktu sejak lahir hingga meninggal/gagal, ekspektasi sisa waktu hidup adalah nilai dari $E[X - t | X > t]$, $t \geq 0$ [17]. Statistik ini sangat penting pada analisis reliabilitas. Jika X berdistribusi PGM, formula ekspektasi sisa waktu hidup disampaikan pada hasil berikut.

Teorema 5. Ekspektasi sisa waktu hidup dari distribusi $\text{PGM}(\alpha, \beta, \lambda, \theta)$ adalah

$$E[X - t | X > t] = \frac{e^{\frac{\alpha}{\beta}}}{S(t)\beta^{\frac{1}{\theta}}} \Gamma\left(\frac{1}{\theta} + 1\right) \left[E_{\beta+1}^{1/\theta-1}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) - E_{\lambda/\beta+1}^{1/\theta-1}\left(\frac{\alpha}{\beta}, e^{\beta t^\theta}\right) \right]. \quad (22)$$

untuk $t \geq 0$.

Bukti. Perhatikan bahwa

$$E[X - t|X > t] = \frac{1}{S(t)} \int_t^\infty (x - t)f(x)dx$$

$$= \frac{E[X] - m_1(t)}{S(t)} - t.$$

Tinggal gunakan Teorema 2 dan 3 untuk memperoleh formula (19).

Ekspektasi waktu hidup sejak lahir diperoleh dengan substitusi $t = 0$ pada (19). Dapat dilihat bahwa hasilnya persis $E[X]$.

3.2.6 Ekspektasi Waktu Tak Aktif

Ekspektasi waktu tak aktif (*mean inactivity time*) menyatakan waktu (secara rata-rata) yang telah berlalu sejak suatu entitas gagal jika waktu kegagalannya, yaitu X , tak lebih dari t . Secara matematis, nilai ini dinyatakan oleh $E[t - X|X \leq t]$ [18]. Ekspektasi waktu tak aktif dan ekspektasi sisa waktu hidup sangat berguna pada analisis reliabilitas dan penelitian epidemiologi. Jika X berdistribusi PGM, kami punya hasil berikut.

Teorema 6. Ekspektasi waktu tak aktif dari distribusi PGM($\alpha, \beta, \lambda, \theta$) adalah

$$E[t - X|X \leq t]$$

$$= \frac{t}{F(t)} - \frac{e^{\frac{\alpha}{\beta}}}{\beta^{\frac{1}{\theta}}} \Gamma\left(\frac{1}{\theta} + 1\right) E_{\lambda/\beta+1}^{1/\theta-1}\left(\frac{\alpha}{\beta}, e^{\beta t^\theta}\right). \quad (23)$$

Bukti. Dengan cara yang serupa seperti pada Teorema 4,

$$E[t - X|X \leq t] = \frac{1}{F(t)} \int_0^t (t - x)f(x)dx$$

$$= t - \frac{m_1(t)}{F(t)}.$$

Tinggal gunakan formula momen tak lengkap distribusi PGM di Teorema 4.

3.3 Estimasi Parameter Dengan MLE

Misalkan x_1, x_2, \dots, x_n adalah n hasil observasi yang berasal dari distribusi PGM dengan vektor parameter $\eta = (\alpha, \beta, \lambda, \theta)$. Fungsi *likelihood* dari distribusi PGM adalah

$$L(\eta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \eta) \quad (24)$$

$$= \theta^n \left(\prod_{i=1}^n x_i^{\theta-1} \xi_i \right) \exp \left[-\lambda \sum_{i=1}^n x_i^\theta - \frac{\alpha}{\beta} \sum_{i=1}^n (e^{\beta x_i^\theta} - 1) \right],$$

dengan $\xi_i = \alpha e^{\beta x_i^\theta} + \lambda$, dan fungsi log-likelihood $l(\eta) = \ln L(\eta)$ adalah

$$l(\eta) = n \ln \theta + (\theta - 1) \sum_{i=1}^n \ln x_i$$

$$+ \sum_{i=1}^n \ln \xi_i - \lambda \sum_{i=1}^n x_i^\theta$$

$$- \frac{\alpha}{\beta} \left(\sum_{i=1}^n e^{\beta x_i^\theta} - n \right). \quad (25)$$

Untuk memaksimumkan $l(\eta)$, pertama kami menghitung turunan parsial pertama $U(\eta) = \left(\frac{\partial l(\eta)}{\partial \alpha}, \frac{\partial l(\eta)}{\partial \beta}, \frac{\partial l(\eta)}{\partial \lambda}, \frac{\partial l(\eta)}{\partial \theta} \right)$, kemudian mencari solusi persamaan $U(\eta) = 0$. Turunan parsial pertama dari $l(\eta)$ terhadap masing-masing parameternya diberikan pada persamaan (24).

$$\frac{\partial l(\eta)}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^n \frac{e^{\beta x_i^\theta}}{\xi_i} + \sum_{i=1}^n \frac{e^{\beta x_i^\theta} - n}{\beta}$$

$$\frac{\partial l(\eta)}{\partial \beta} = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha x_i^\theta e^{\beta x_i^\theta}}{\xi_i} + \sum_{i=1}^n \frac{\alpha x_i^\theta e^{\beta x_i^\theta}}{\beta}$$

$$+ \sum_{i=1}^n \frac{\alpha (e^{\beta x_i^\theta} - n)}{\beta^2}$$

$$\frac{\partial l(\eta)}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\xi_i} - \sum_{i=1}^n x_i^\theta \quad (26)$$

$$\frac{\partial l(\eta)}{\partial \theta} = \frac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^n \frac{\alpha \beta x_i^\theta \ln x_i e^{\beta x_i^\theta}}{\xi_i}$$

$$- \sum_{i=1}^n \alpha x_i^\theta \ln x_i e^{\beta x_i^\theta}$$

$$+ \sum_{i=1}^n \ln x_i^\theta$$

Solusi dari sistem persamaan (24) menjadi vektor estimasi parameter $\hat{\eta} =$

$(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\lambda}, \hat{\theta})$ dari distribusi PGM dengan metode MLE.

3.3.1 Hasil Pada Data Simulasi

Pada proses simulasi, kami menetapkan parameter $\alpha = 1,2$, $\beta = 0,5$, $\lambda = 2,4$, dan $\theta = 1,7$ untuk membangkitkan data berdistribusi PGM dan estimasi parameter dilakukan pada sampel berukuran $n = 20, 50, 100, 300$. Hasil estimasi parameter pada data simulasi diberikan pada Tabel 1.

Tabel 1. Hasil Simulasi

n	Par	Mean	Bias	MSE
20	$\hat{\alpha}$	1,35232	0,87278	2,02207
	$\hat{\beta}$	1,13961	1,10769	2,90578
	$\hat{\lambda}$	2,64483	0,89105	1,39947
	$\hat{\theta}$	1,80397	0,25853	0,12693
50	$\hat{\alpha}$	1,18060	0,47906	0,39564
	$\hat{\beta}$	0,93160	0,83096	1,10512
	$\hat{\lambda}$	2,42770	0,53315	0,46604
	$\hat{\theta}$	1,74364	0,15544	0,04105
100	$\hat{\alpha}$	1,21739	0,30567	0,16228
	$\hat{\beta}$	0,69565	0,54842	0,45948
	$\hat{\lambda}$	2,3725	0,36596	0,20244
	$\hat{\theta}$	1,6949	0,10444	0,01711
300	$\hat{\alpha}$	1,20162	0,18026	0,0513
	$\hat{\beta}$	0,56459	0,3609	0,18478
	$\hat{\lambda}$	2,39987	0,22479	0,07839
	$\hat{\theta}$	1,70481	0,06258	0,00607

Dari Tabel 1, terlihat bahwa semakin besar ukuran sampel (n) bias dan MSE pada estimasi parameter semakin kecil. Hal ini menunjukkan konsistensi dari estimasi parameter.

3.3.2 Aplikasi Pada Data Riil

Pada bagian ini, kami melakukan *fitting* distribusi PGM pada data *breaking stress* dari fiber karbon panjang 50 mm (dalam GPa) yang terdiri dari $n = 100$ pengamatan. Data ini pertama kali digunakan oleh Nichols dan Padgett di [19]. *Fitting* data juga dilakukan

dengan submodel GM dan PGo, serta dengan satu distribusi lain yang juga memiliki empat parameter, yaitu Gompertz Lomax (GoLx), lihat [20] Perbandingan hasil estimasi diukur dengan menghitung nilai AIC (*Akaike Information Criterion*), BIC (*Bayesian Information Criterion*), dan HQIC (*Hannan-Quinn Information Criterion*) yang dirumuskan oleh

$$\begin{aligned} AIC &= -2\ell(\hat{\eta}) + 2k, \\ BIC &= -2\ell(\hat{\eta}) + k \ln n, \\ HQIC &= -2\ell(\hat{\eta}) + 2k \ln(\ln n), \end{aligned}$$

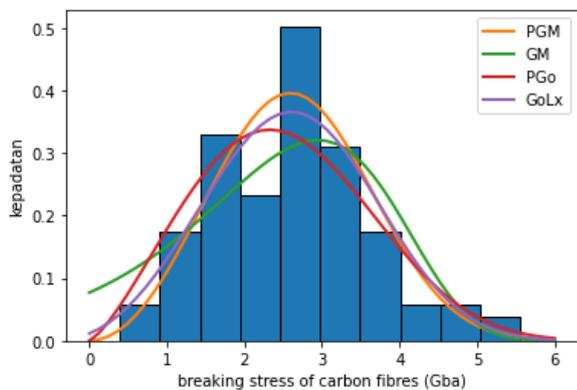
dengan n menyatakan ukuran sampel, k banyak parameter model, dan $\ell(\hat{\eta})$ adalah nilai negatif log-likelihood yang dihitung pada parameter hasil estimasi model. Hasil estimasi pada masing-masing model diberikan pada Tabel 3.

Tabel 2. Hasil fitting distribusi pada data *breaking stress* fiber karbon

Model	Par	Est	AIC	BIC	HQIC
PGM	$\hat{\alpha}$	0,0381	291,983	302,404	296,200
	$\hat{\beta}$	$2,1374 \times 10^{-6}$			
	$\hat{\lambda}$	$1,1934 \times 10^{-20}$			
	$\hat{\theta}$	3,0010			
GM	$\hat{\alpha}$	0,0769	304,25	312,066	307,413
	$\hat{\beta}$	0,7910			
	$\hat{\lambda}$	1×10^{-10}			
PGo	$\hat{\alpha}$	0,083	292,834	300,650	295,997
	$\hat{\beta}$	0,007			
	$\hat{\theta}$	2,320			
GoLx	$\hat{\theta}$	0,009	292,965	303,286	297,082
	$\hat{\gamma}$	5,066			
	\hat{a}	0,647			
	\hat{b}	1,985			

Terlihat bahwa distribusi PGM memberikan hasil yang relatif lebih baik dibandingkan submodelnya jika dilihat dari nilai AIC. Distribusi PGM dan PGo memberikan hasil yang sebanding dalam

fitting distribusi; nilai AIC pada distribusi PGM lebih baik, sedangkan nilai BIC pada distribusi PGo lebih baik. Perbandingan hasil *fitting* distribusi divisualisasikan pada Gambar 9. Terlihat bahwa grafik fungsi kepadatan dari PGM (kurva berwarna oranye) cukup baik dalam mendekati data.



Gambar 9. Histogram data *breaking stress* dari fiber karbon dan hasil *fitting* keempat distribusi

4. Penutup

Pada artikel ini telah diperkenalkan distribusi *power* Gompertz-Makeham yang memperluas distribusi Gompertz-Makeham. Beberapa sifat-sifat statistika dari distribusi baru ini telah diperoleh dalam bentuk tertutup. Kelebihan distribusi ini adalah formulasi modelnya yang tidak terlalu rumit, tetapi mampu memberikan pendekatan yang lebih baik. Penelitian selanjutnya yang dapat dilakukan terkait model ini adalah mendapatkan sifat-sifat yang lain dari distribusinya dan menguji model pada data waktu hidup (*lifetime data*).

Referensi

[1] A. W. Marshall-ingram Olkin, “Springer Series in Statistics Life Distributions Structure of Nonparametric, Semiparametric, and Parametric Families.”

[2] S. Dey, F. A. Moala, dan D. Kumar, “Statistical properties and different methods of estimation of Gompertz distribution with application,” *Journal of Statistics and Management Systems*, vol. 21, no. 5, hlm. 839–876, Sep 2018, doi: 10.1080/09720510.2018.1450197.

[3] F. Castellares, S. Patrício, dan A. J. Lemonte, “On the Gompertz–Makeham law: A useful mortality

model to deal with human mortality,” *Braz J Probab Stat*, vol. 36, no. 3, hlm. 613–639, Sep 2022, doi: 10.1214/22-BJPS545.

- [4] F. Jiménez Torres, “Estimation of parameters of the shifted Gompertz distribution using least squares, maximum likelihood and moments methods,” *J Comput Appl Math*, vol. 255, hlm. 867–877, 2014, doi: 10.1016/j.cam.2013.07.004.
- [5] I. M. Elbatal, F. Jamal, C. Chesneau, M. Elgarhy, S. Alrajhi, dan I. Elbatal, “The Modified Beta Gompertz Distribution: Theory and Applications.” [Daring]. Tersedia pada: <https://hal.science/hal-01912274v2>
- [6] M. S. Eliwa, M. El-Morshedy, dan M. Ibrahim, “Inverse Gompertz Distribution: Properties and Different Estimation Methods with Application to Complete and Censored Data,” *Annals of Data Science*, vol. 6, no. 2, hlm. 321–339, Jun 2019, doi: 10.1007/s40745-018-0173-0.
- [7] E. H. A. Rady, W. A. Hassanein, dan T. A. Elhaddad, “The power Lomax distribution with an application to bladder cancer data,” *Springerplus*, vol. 5, no. 1, Des 2016, doi: 10.1186/s40064-016-3464-y.
- [8] A. A. Bhat, S. Parvaiz Ahmad, dan S. Ahmad, “A New Generalization of Rayleigh Distribution: Properties and Applications,” 2020. [Daring]. Tersedia pada: <https://www.researchgate.net/publication/342232696>
- [9] M. E. Ghitany, D. K. Al-Mutairi, N. Balakrishnan, dan L. J. Al-Enezi, “Power Lindley distribution and associated inference,” *Comput Stat Data Anal*, vol. 64, hlm. 20–33, 2013, doi: 10.1016/j.csda.2013.02.026.
- [10] P. Jodrá, H. W. Gómez, M. D. Jiménez-Gamero, dan M. V. Alba-Fernández, “The Power Muth Distribution*,” *Mathematical Modelling and Analysis*, vol. 22, no. 2, hlm. 186–201, Mar 2017, doi: 10.3846/13926292.2017.1289481.

- [11] T. G. Ieren, F. M. Kromtit, B. Uke Agbor, I. B. Eraikhuemen, dan P. O. Koleoso, "A Power Gompertz Distribution: Model, Properties and Application to Bladder Cancer Data," *Asian Research Journal of Mathematics*, hlm. 1–14, Okt 2019, doi: 10.9734/arjom/2019/v15i230146.
- [12] T. K. Pogány, G. M. Cordeiro, M. H. Tahir, dan H. M. Srivastava, "Extension of generalized integro-exponential function and its application in study of chen distribution," *Applicable Analysis and Discrete Mathematics*, vol. 11, no. 2, hlm. 434–450, 2017, doi: 10.2298/AADM1702434P.
- [13] P. Jodrá, "A closed-form expression for the quantile function of the Gompertz-Makeham distribution," *Math Comput Simul*, vol. 79, no. 10, hlm. 3069–3075, Jun 2009, doi: 10.1016/j.matcom.2009.02.002.
- [14] M. S. Milgram, "The Generalized Integro-Exponential Function."
- [15] R. J. Butler dan J. B. McDonald, "Using incomplete moments to measure inequality," *J Econom*, vol. 42, no. 1, hlm. 109–119, 1989, doi: 10.1016/0304-4076(89)90079-1.
- [16] S. Pundir, S. Arora, dan K. Jain, "Bonferroni Curve and the related statistical inference," *Stat Probab Lett*, vol. 75, no. 2, hlm. 140–150, Nov 2005, doi: 10.1016/j.spl.2005.05.024.
- [17] R. C. Gupta dan D. M. Bradley, "Representing the Mean Residual Life in Terms of the Failure Rate," 2003. [Daring]. Tersedia pada: www.elsevier.com/locate/mcm
- [18] R. A. Kan, D. Bhattacharyya, dan M. Mitra, "On some properties of the mean inactivity time function," *Stat Probab Lett*, vol. 170, Mar 2021, doi: 10.1016/j.spl.2020.108993.
- [19] M. D. Nichols dan W. J. Padgett, "A bootstrap control chart for weibull percentiles," *Qual Reliab Eng Int*, vol. 22, no. 2, hlm. 141–151, Mar 2006, doi: 10.1002/qre.691.
- [20] P. E. Ountunde, M. A. Khaleel, M. T. Ahmed, A. O. Adejumo, dan O. A. Odetunmbi, "A New Generalization of the Lomax Distribution with Increasing, Decreasing, and Constant Failure Rate," *Modelling and Simulation in Engineering*, vol. 2017, 2017, doi: 10.1155/2017/6043169.