Available online : https://doi.org/10.32665/james.v7i1.1913

Journal of Mathematics Education and Science

p-ISSN: 2621-1203 VOL. 7 NO. 1 (2024) : 21-32 e-ISSN: 2621-1211

KONGRUENSI DAN HOMOMORFISMA (m,n)-SEMINEARRING

Muhsang Sudadama Lieko Liedokto[1], Mu'amar Musa Nurwigantara[2]

Corresponding author : Muhsang Sudadama Lieko Liedokto
[1]Universitas Negeri Malang, muhsangsll@gmail.com
[2]Universitas Gadjah Mada, muamar.musa.n@mail.ugm.ac.id
Received : 8 September 2023, Revised : 11 Oktober 2023, Accepted : 11 Oktober 2023

Abstract

The (m,n)-seminearring structure is a generalization of seminearring, where the binary operations of addition and multiplication are replaced by m-ary and n-ary operations, which are not necessarily commutative. This research aims to prove the fundamental theorem of homomorphism and congruence properties on (m,n)-seminearring related to homomorphism. The method used in this research is to adopt congruence properties on n-semigroup, ternary semiring, (m,n)-semiring, seminearring, ternary seminearring, and universal algebra.

Keywords: congruence, ternary semiring, seminearring, universal algebra

Abstrak

Struktur (m,n)-*seminearring* merupakan generalisasi dari *seminearring*, dimana operasi biner penjumlahan dan perkalian diganti dengan operasi m-*ary* dan n-*ary*, yang keduanya belum tentu komutatif. Tujuan dari penelitian ini adalah membuktikan teorema fundamental homomorfisma dan sifat-sifat kongruensi pada (m,n)-*seminearring* yang berkaitan dengan homomorfisma. Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah mengadopsi sifat-sifat kongruensi pada n-semigrup, semiring terner, (m,n)-semiring, *seminearring*, *seminearring* terner, dan aljabar universal.

Kata kunci: kongruensi, semiring terner, seminearring, aljabar universal

1. Pendahuluan

Matematika murni, yang juga sering disebut sebagai matematika teoritis, belum diketahui aplikasinya yang langsung atau segera terlihat. Meskipun demikian, penelitian dan teori yang dihasilkan dalam matematika murni sering memberikan kontribusi signifikan dalam berbagai bidang ilmu pengetahuan dan teknologi. Namun, perubahan penelitian matematika murni menjadi aplikasi praktis memerlukan waktu yang cukup lama. Dalam beberapa kasus, diperlukan beberapa dekade atau bahkan lebih lama sebelum suatu teori matematika murni memiliki pengaruh praktis yang signifikan. Proses ini melibatkan eksperimen, pemodelan, pengujian, dan pengembangan teknologi yang membutuhkan waktu untuk mengintegrasikan teori matematika murni ke dalam konteks praktis. Penting untuk diingat bahwa matematika murni sendiri memiliki nilai intrinsik yang signifikan, tanpa mempertimbangkan aplikasinya. Ia berkontribusi pada pemahaman kita tentang dunia ini dan memberikan landasan yang kokoh bagi banyak bidang ilmu pengetahuan dan tekno-logi yang kita manfaatkan seharihari.

Sistem m-*ary* adalah generalisasi struktur aljabar yang telah banyak diaplikasikan oleh para peneliti sebelumnya. Sebagai contoh, Grzymala-Busse [1] telah mengaplikasikan sistem m-*ary* dalam teori otomata. Selain itu, beberapa sistem m-*ary* juga telah diterapkan dalam teori grup kuantum [2] dan kombinatorika [3]. Aplikasi struktur terner dalam fisika telah dijelaskan oleh Kerner [4]. Di bidang fisika, terdapat juga aplikasi struktur seperti aljabar m-Lie [5] dan aljabar Filippov m-*ary* [6]. Selain itu, beberapa struktur m-*ary* yang dihasilkan oleh hiperkubus juga memiliki aplikasi penting dalam teori pengkodean pemulihan kesalahan, pendeteksian kesalahan, kriptologi, dan teori (t, m, s)-*nets* [7]. Oleh karena itu, penting untuk terus mengembangkan pemahaman tentang sistem m-*ary* dan menerapkan konsep ini dalam berbagai bidang. Dengan melakukannya, kita dapat memanfaatkan kekayaan pengetahuan matematika untuk mencapai pemahaman yang lebih baik tentang dunia yang kompleks di sekitar kita.

Selama periode waktu yang lama, penelitian mengenai generalisasi struktur aljabar telah menjadi fokus utama bagi para matematikawan. Sebagai contoh, Lister [8] menggeneralisasi konsep ring menjadi ring terner dengan menggantikan operasi biner perkalian (2-*ary*) menjadi operasi perkalian terner (3-*ary*). Crombez [9] bahkan melakukan generalisasi ke (m, n)-ring dengan mengubah operasi penjumlahan dan perkalian menjadi m-*ary* dan n-*ary*. Generalisasi ini juga dapat diterapkan pada struktur semiring, dimana Dutta dan Kar [10] melakukan generalisasi ke semiring terner, yang kemudian Pop dan Pop [11] melanjutkan generalisasi menjadi (m, n)-semiring. Selain itu, struktur *seminearring* juga mengalami generalisasi menjadi *seminearring* terner [12], dan kemudian menjadi (m, n)-*seminearring* [13].

Gagasan kongruensi telah memainkan peran penting dalam studi struktur aljabar sejak diperkenalkan oleh Karl Friedrich Gauss pada awal abad ke-19. Kongruensi merupakan relasi ekuivalensi yang berperan sentral dalam membangun struktur kuosien dari beragam struktur aljabar. Pada tahun 1997, Dixit dan Dewan [14] menggambarkan konsep kongruensi pada semigrup terner dan mengkaji beberapa sifat menarik yang kemudian diperdalam oleh Chronowski [15]. Kar dan Maity [16] memperkenalkan konsep kongruensi kanselasi, kongruensi grup, dan kongruensi Rees pada semigrup terner. Selanjutnya, Somsup dan Leerawat [17] menyajikan konsep kongruensi pada n-semigrup dan membuktikan teorema fundamental homomorfisma n-semigrup. Selain itu, konsep kongruensi juga disajikan pada struktur aljabar lain seperti semiring [18], semiring terner [10], (m, n)-semiring [19], *seminearring* [20], dan *seminearring* terner [21]. Dalam artikel peneliti sebelumnya [13], telah dikenalkan konsep kongruensi pada (m, n)-*seminearring* dan membentuk struktur (m, n)-*seminearring* kuosien.

Namun, sejauh pengetahuan terbaik peneliti, belum ada penelitian yang mengeksplorasi sifat-sifat kongruensi pada (m, n)-*seminearring* yang berhubungan dengan homomorfisma. Oleh karena itu, tujuan dari penelitian ini adalah membuktikan teorema fundamental homomorfisma dan sifat-sifat kongruensi pada (m, n)-*seminearring* yang berkaitan dengan homomorfisma. Dengan demikian, diharapkan penelitian ini dapat memberikan kontribusi yang signifikan dan dapat diaplikasikan dalam berbagai bidang.

2. Metode

Langkah-langkah sistematis telah diambil dalam proses pengerjaan artikel ini, yaitu:

1) Melakukan tinjauan literatur secara ekstensif untuk mengkaji kontribusi-kontribusi sebelumnya dan mengidentifikasi kesenjangan penelitian yang ada.
2) Mempelajari kongruensi dan kuosien dari berbagai struktur aljabar, seperti semiring [18], n-semigrup [17], semiring terner [10], (m, n)-semiring [19], *seminearring* [20] [22], *seminearring terner* [21], (m, n)-*seminearring* [13], dan aljabar universal [23] [24].
3) Mempelajari secara mendalam sifat-sifat kongruensi pada n-semigrup yang berkaitan dengan homomorfisma [17].
4) Melakukan proses generalisasi dari n-semigrup ke (m, n)-*seminearring* untuk sifat-sifat kongruensi pada (m, n)-*seminearring* yang berkaitan dengan homomorfisma.

3. Tinjauan Pustaka

Misalkan R adalah himpunan tak kosong dan $f: R^m \to R$ adalah suatu fungsi (disebut operasi m-*ary*). Himpunan tak kosong R bersama dengan operasi m-*ary* f disebut m-grupoid, dinotasikan (R, f). Umumnya dalam teori m-grup, digunakan notasi singkat: barisan $a_i, \dots, a_j$ dinotasikan a_i^j; untuk $j < i$, a_i^j adalah simbol kosong; dan $\underbrace{a, \dots, a}_{k}$ dinotasikan a^k. Untuk semua $1 \leq i \leq j \leq m$, ekspresi

$f\left(a_1, a_2, \dots, a_i, b_{i+1}, \dots, b_j, c_{j+1}, \dots, c_m\right)$

disingkat menjadi $f\left(a_1^i, b_{i+1}^j, c_{j+1}^m\right)$. Untuk kasus $b_{i+1} = \cdots = b_j = b$, ekspresinya ditulis sebagai $f\left(a_1^i, b^{j-i}, c_{j+1}^m\right)$. Operasi m-*ary* f bersifat (i, j)-asosiatif jika untuk setiap $a_1^{2m-1} \in R$ berlaku

$$f\left(a_1^{i-1}, f\left(a_i^{m+i-1}\right), a_{m+i}^{2m-1}\right) = f\left(a_1^{j-1}, f\left(a_j^{m+j-1}\right), a_{m+j}^{2m-1}\right) \quad (1)$$

untuk suatu $1 \leq i < j \leq m$. Jika kondisi (1) berlaku untuk setiap $1 \leq i < j \leq m$, maka operasi m-*ary* f bersifat asosiatif. Suatu m-grupoid (R, f) disebut m-semigrup jika f bersifat asosiatif [25]. Operasi m-*ary* bersifat komutatif jika untuk setiap $a_1^m \in R$ berlaku

$$f(a_1, a_2, \dots, a_m) = f\left(a_{\eta(1)}, a_{\eta(2)}, \dots, a_{\eta(m)}\right) \quad (2)$$

untuk setiap permutasi η oleh $\{1, 2, \dots, m\}$. Suatu m-semigrup (R, f) disebut m-semigrup komutatif jika f bersifat komutatif. Selanjutnya, m-semigrup (R, f) disebut m-grup jika untuk setiap $1 \leq i \leq m$ dan $a_1^m \in R$, persamaan

$$f\left(a_1^{i-1}, x, a_{i+1}^m\right) = a_i \quad (3)$$

mempunyai penyelesaian di R [26]. Misalkan $f: R^m \to R$ adalah operasi m-*ary* dan $g: R^n \to R$ adalah operasi n-*ary*. Operasi n-*ary* g bersifat i-distributif terhadap f jika untuk setiap $a_1^m, b_1^{i-1}, b_{i+1}^n \in R$ berlaku

$$g\left(b_1^{i-1}, f(a_1^m), b_{i+1}^n\right) = f\left(g\left(b_1^{i-1}, a_1, b_{i+1}^n\right), \dots, g\left(b_1^{i-1}, a_m, b_{i+1}^n\right)\right). \quad (4)$$

Jika g bersifat 1-distributif (n-distributif) terhadap f, maka g disebut distributif kiri (distributif kanan) terhadap f. Selanjutnya, jika g bersifat i-distributif terhadap f untuk setiap $1 \leq i \leq n$, maka g disebut distributif terhadap f [13].

Artikel peneliti sebelumnya [13] telah memperkenalkan konsep (m, n)-*seminearring* yang merupakan generalisasi dari (m, n)-semiring [11].

Definisi 3.1 [13] Misalkan R adalah himpunan tak kosong bersama operasi m-*ary* $f: R^m \to R$ (sebut penjumlahan) dan operasi n-*ary* $g: R^n \to R$ (sebut perkalian). Tripel (R, f, g) disebut i-(m, n)-*seminearring* jika memenuhi kondisi:

1) (R, f) adalah m-semigrup,
2) (R, g) adalah n-semigrup, dan.
3) g bersifat i-distributif terhadap f.

Jika (R, f, g) adalah 1-(m, n)-*seminearring* (n-(m, n)-*seminearring*), maka (R, f, g) disebut (m, n)-*seminearring* kanan ((R, f, g)-*seminearring* kiri). Selanjutnya, seluruh istilah (m, n)-*seminearring* yang disebutkan dalam artikel ini merujuk pada (m, n)-*seminearring* kiri. Artikel ini hanya membahas (m, n)-*seminearring* kiri, sebab kasus i-(m, n)-*seminearring* untuk i lainnya analog.

Tripel (R, f, g) adalah (m, n)-semiring jika (R, f, g) adalah i-(m, n)-*seminearring* untuk setiap $1 \leq i \leq n$ [19]. Suatu (m, n)-semiring (R, f, g) adalah (m, n)-ring jika (R, f) adalah m-grup dan f bersifat komutatif. Kasus spesifik, untuk $m = n = 2$, $(2,2)$-*seminearring* (*resp.* $(2,2)$-semiring, $(2,2)$-ring) disebut *seminearring* [27] (*resp.* semiring, ring). Untuk $m = 2$ dan $n = 3$, $(2,3)$-*seminearring* (*resp.* (2,3)-semiring, (2,3)-ring) disebut *seminearring terner* [12] (*resp.* semiring terner [10], ring terner [8]).

Contoh 3.2 Himpunan $\mathbb{Z}^-$ adalah himpunan semua bilangan bulat negatif. Diberikan operasi m-*ary*

$$f(a_1^m) := \sum_{i=1}^{m} a_i \quad (5)$$

dan operasi n-*ary*

$$g(b_1^n) := \prod_{j=1}^{n} b_j. \quad (6)$$

Tripel $(\mathbb{Z}^-, f, g)$ adalah (m, n)-*seminearring* jika n adalah bilangan ganjil, tetapi $(\mathbb{Z}^-, f, g)$ bukan (m, n)-*seminearring* jika n adalah bilangan genap karena $g(b_1^n) \notin \mathbb{Z}^-$ untuk setiap $b_1^n \in \mathbb{Z}^-$.

Contoh 3.3 [12] (m,n)-*seminearring* belum tentu (m,n)-semiring. Himpunan $\mathbb{R}$ adalah himpunan semua bilangan real. Tripel $(\mathbb{R}^2, f, g)$ adalah $(2,3)$-*seminearring* terhadap operasi 2-*ary*

$$f\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big) \coloneqq (x_1+x_2, y_1+y_2) \quad (7)$$

dan operasi 3-*ary*

$$g\big((x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3)\big) \coloneqq (x_1x_2x_3, y_1x_2x_3+y_2x_3+y_3) \quad (8)$$

tetapi bukan $(2,3)$-semiring karena g tidak bersifat distributif kanan terhadap f.

Definisi 3.4 [13] Misalkan (R,f,g) adalah (m,n)-*seminearring*. Tripel (S,f,g) adalah (m,n)-*subseminearring* dari (R,f,g) jika $\emptyset \neq S \subseteq R$ dan (S,f,g) adalah (m,n)-*seminearring.*

Teorema 3.5 [13] Misalkan (R,f,g) adalah (m,n)-*seminearring* dan $\emptyset \neq S \subseteq R$. Tripel (S,f,g) adalah (m,n)-*subseminearring* jika dan hanya jika untuk setiap $a_1^m, b_1^n \in S$ berlaku
1) $f(a_1^m) \in S$;
2) $g(b_1^n) \in S$.

Definisi 3.6 [13] Misalkan (R_1,f_1,g_1) dan (R_2,f_2,g_2) adalah dua (m,n)-*seminearring*. Fungsi $\psi: R_1 \to R_2$ disebut homomorfisma dari (R_1,f_1,g_1) ke (R_2,f_2,g_2) jika
1) $\psi\big(f_1(a_1^m)\big) = f_2\big(\psi(a_1),\dots,\psi(a_m)\big)$
2) $\psi\big(g_1(b_1^n)\big) = g_2\big(\psi(b_1),\dots,\psi(b_n)\big)$

untuk setiap $a_1^m, b_1^n \in R_1$. Homomorfisma ψ: $R_1 \to R_2$ disebut isomorfisma jika ψ bersifat bijektif. Dalam hal ini, R_1 dikatakan isomorfik ke R_2 dan dinotasikan $R_1 \cong R_2$.

Misalkan R adalah himpunan tak kosong. Himpunan bagian ρ dari R^2 disebut relasi pada R. Jika $(a,b) \in \rho$, kita katakan a berelasi dengan b, dan ditulis $a\rho b$. Relasi diagonal pada R, dinotasikan Δ_R, didefinisikan him-punan.

$$\Delta_R \coloneqq \{(a,a) \in R^2 | a \in R\}. \quad (9)$$

Relasi ρ pada R disebut relasi ekuivalen jika untuk setiap $a,b,c \in R$ memenuhi kondisi: refleksif, $a\rho a$; simetris, jika $a\rho b$ maka $b\rho a$; dan transitif, jika $a\rho b$ dan $b\rho c$ maka $a\rho c$. Himpunan semua relasi ekuivalen pada R, dinotasikan sebagai $\mathrm{Eq}(R)$. Kelas ekuivalen pada R yang bersesuaian dengan b, dituliskan sebagai $\rho(b)$,

$$\rho(b) \coloneqq \{a \in R | a\rho b\}. \quad (10)$$

Koleksi dari kelas ekuivalen pada R oleh ρ, dinotasikan R/ρ,

$$R/\rho \coloneqq \{\rho(a) | a \in R\}. \quad (11)$$

Teorema 3.7 [28] Misalkan R adalah himpunan tak kosong, $\rho \in \mathrm{Eq}(R)$, dan $a,b \in R$.
Akibatnya berlaku
1) $a \in \rho(a)$;
2) jika $a \in \rho(b)$, maka $\rho(a) = \rho(b)$;
3) $\rho(a) = \rho(b)$ jika dan hanya jika $a\rho b$;
4) Salah satu $\rho(a) = \rho(b)$ atau $\rho(a) \cap \rho(b) = \emptyset$.

Teorema 3.8 [28] Jika $R \neq \emptyset$ dan $\rho \in \mathrm{Eq}(R)$ maka R/ρ membentuk partisi dari R.

Artikel peneliti sebelumnya [13] telah memperkenalkan konsep relasi kongruensi pada (m,n)-*seminearring* dan membentuk struktur (m,n)-*seminearring* kuosien menggunakan kongruensi.

Definisi 3.9 [13] Misalkan (R,f,g) adalah (m,n)-*seminearring*. Relasi ekuivalen ρ pada R disebut relasi kongruensi atau kongruensi jika untuk setiap $a_1^m, b_1^m, c_1^n, d_1^n \in R$ dengan $a_i \rho b_i$ dan $c_j \rho d_j$ untuk setiap $i,j \in \{1,2,\dots,n\}$ berakibat
1) $f(a_1^m)\rho f(b_1^m)$;
2) $g(c_1^n)\rho g(d_1^n)$.

Himpunan semua relasi kongruensi pada R akan dituliskan sebagai $\mathrm{Con}(R)$.

Teorema 3.10 [13] Jika (R,f,g) adalah suatu (m,n)-*seminearring* dan $\rho \in \mathrm{Con}(R)$, maka dapat dikonstruksi (m,n)-*seminearring* $(R/\rho, f_0, g_0)$ terhadap operasi m-*ary*

$$f_0\big(\rho(a_1),\dots,\rho(a_m)\big) \coloneqq \rho\big(f(a_1^m)\big) \quad (12)$$

dan operasi n-*ary*

$$g_0\big(\rho(b_1),\dots,\rho(b_n)\big) \coloneqq \rho\big(g(b_1^n)\big). \quad (13)$$

Struktur $(R/\rho, f_0, g_0)$ disebut (m,n)-*seminearring* kuosien.

4. Pembahasan

Pada bagian ini, disajikan beberapa sifat-sifat kongruensi pada (m,n)-*seminearring* yang berkaitan dengan homomorfisma.

Teorema 4.1 Misalkan (R_1, f_1, g_1) dan (R_2, f_2, g_2) adalah dua (m,n)-*seminearring* dan $\psi: R_1 \to R_2$ adalah homomorfisma.

1) Kernel dari ψ, dinotasikan $\ker\psi$, didefinisikan
$$\ker\psi := \{(a,b) \in R_1^2 | \psi(a) = \psi(b)\} \quad (14)$$
adalah kongruensi pada R_1.
2) Jika $\rho \in \mathrm{Con}(R_1)$ maka suatu relasi pada R_2, dinotasikan sebagai $\vec{\psi}(\rho)$, didefinisikan
$$\vec{\psi}(\rho) := \left\{\left(\psi(a), \psi(b)\right) \in R_2^2 \middle| a\rho b\right\} \quad (15)$$
adalah kongruensi pada R_2.
3) Jika $\sigma \in \mathrm{Con}(R_2)$ maka suatu relasi pada R_1, dinotasikan $\overleftarrow{\psi}$, didefinisikan
$$\overleftarrow{\psi}(\sigma) := \{(a,b) \in R_1 | \psi(a)\sigma\psi(b)\} \quad (16)$$
adalah kongruensi pada R_1.

Bukti: 1) Jelas $\ker\psi \in \mathrm{Eq}(R_1)$. Diberikan sebarang $a_1^m, b_1^m, c_1^n, d_1^n \in R_1$ dengan $a_i \ker\psi\ b_i$ dan $c_j \ker\psi\ d_j$ untuk setiap $1 \leq i \leq m$ dan $1 \leq j \leq n$. Akibatnya, $\psi(a_i) = \psi(b_i)$ dan $\psi(c_j) = \psi(d_j)$. Karena ψ adalah homomorfisma, maka $\psi(f_1(a_1^m)) = \psi(f_1(b_1^m))$ dan $\psi(g_1(c_1^n)) = \psi(g_1(d_1^n))$. Oleh karena itu, diperoleh $f_1(a_1^m) \ker\psi\ f_1(b_1^m)$ dan $g_1(c_1^n)$ $\ker\psi$ $g_1(d_1^n)$. Jadi, $\ker\psi \in \mathrm{Con}(R_1)$.

2) Jelas bahwa $\vec{\psi}(\rho) \in \mathrm{Eq}(R_1)$. Asumsikan $a_i\vec{\psi}(\rho)b_i$ dan $c_j\vec{\psi}(\rho)d_j$ untuk setiap $1 \leq i \leq m$ dan $1 \leq j \leq n$, artinya terdapat w_i, x_i, $y_j, z_j \in R$ sedemikian sehingga $\psi(w_i) = a_i$, $\psi(x_i) = b_i$, $\psi(y_j) = c_j$, dan $\psi(z_j) = d_j$. Karena $\rho \in \mathrm{Con}(R_1)$, $f_1(w_1^m)\rho f_1(x_1^m)$ dan $g_1(y_1^n)\rho g_1(z_1^n)$. Oleh karena itu, diperoleh $\psi(f_1(w_1^m))\vec{\psi}(\rho)\psi(f_1(x_1^m))$ dan $\psi(g_1(y_1^n))$ $\vec{\psi}(\rho)\psi(g_1(z_1^n))$. Hal ini mengakibatkan
$$f_2(\psi(w_1), \dots, \psi(w_m)) \\ \vec{\psi}(\rho) f_2(\psi(w_1), \dots, \psi(w_m)) \quad (17)$$
dan
$$g_2(\psi(y_1), \dots, \psi(y_n)) \\ \vec{\psi}(\rho) g_2(\psi(z_1), \dots, \psi(z_m)). \quad (18)$$
Dengan demikian, $f_2(a_1^m)\vec{\psi}(\rho)f_2(b_1^m)$ dan $g_2(c_1^n)\vec{\psi}(\rho)g_2(d_1^n)$. Jadi, $\vec{\psi}(\rho) \in \mathrm{Con}(R_2)$.

3) Cukup jelas $\overleftarrow{\psi}(\sigma) \in \mathrm{Eq}(R_1)$. Asumsikan $a_i\overleftarrow{\psi}(\sigma)b_i$ dan $c_j\overleftarrow{\psi}(\sigma)d_j$ untuk setiap $1 \leq i \leq m$ dan $1 \leq j \leq n$. Akibatnya, $\psi(a_i)\sigma\ \psi(b_i)$ dan $\psi(c_j)\sigma\psi(d_j)$. Karena σ adalah kongruensi pada R_2,
$$f_2(\psi(a_1), \dots, \psi(a_m)) \\ \sigma f_2(\psi(b_1), \dots, \psi(b_m)) \quad (19)$$
dan
$$g_2(\psi(c_1), \dots, \psi(c_n)) \\ \sigma g_2(\psi(d_1), \dots, \psi(d_n)) \quad (20)$$
Oleh karena itu, $\psi(f_1(a_1^m))\sigma\psi(f_1(b_1^m))$ dan $\psi(g_1(c_1^n))\sigma\psi(g_1(d_1^n))$. Dengan demikian, $f_1(a_1^m)\overleftarrow{\psi}(\sigma)f_1(b_1^m)$ dan $g_1(c_1^n)\overleftarrow{\psi}(\sigma)g_1(d_1^n)$. Jadi, terbukti bahwa $\overleftarrow{\psi}(\sigma) \in \mathrm{Con}(R_1)$. ◻

Teorema 4.2 Misalkan (R_1, f_1, g_1) dan (R_2, f_2, g_2) adalah dua (m,n)-*seminearring* dan fungsi $\psi: R_1 \to R_2$ adalah homomorfisma. Homomorfisma $\psi: R_1 \to R_2$ bersifat injektif jika dan hanya jika $\ker\psi = \Delta_{R_1}$.

Bukti: ($\Longrightarrow$) Diambil sebarang $(a,b) \in \ker\psi$, artinya $\psi(a) = \psi(b)$. Karena ψ bersifat injektif, $a = b$. Dengan demikian, $(a,b) \in \Delta_{R_1}$. ($\Longleftarrow$) Diambil sebarang $(a,b) \in \Delta_{R_1}$. Akibatnya, $a = b$. Oleh karena itu, $\psi(a) = \psi(b)$. Jadi, terbukti bahwa $(a,b) \in \ker\psi$. ◻

Teorema 4.3 Jika (R, f, g) adalah (m,n)-*seminearring* dan $\rho \in \mathrm{Con}(R)$ maka terdapat homomorfisma dari (R, f, g) ke $(R/\rho, f_0, g_0)$

Bukti: Misalkan $\varphi: R \to R/\rho$ dengan definisi $\varphi(x) := \rho(x)$. Diberikan sebarang $x_1^m, y_1^n \in R$,
$$\begin{aligned} \varphi(f(x_1^m)) &= \rho(f(x_1^m)) \\ &= f_0(\rho(x_1), \dots, \rho(x_m)) \\ &= f_0(\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_m)) \end{aligned} \quad (21)$$
dan
$$\begin{aligned} \varphi(g(y_1^n)) &= \rho(g(y_1^n)) \\ &= g_0(\rho(y_1), \dots, \rho(y_n)) \\ &= g_0(\varphi(y_1), \dots, \varphi(y_n)). \end{aligned} \quad (22)$$
Jadi, φ adalah homomorfisma, φ disebut homomorfisma natural. ◻

Akibat 4.4 Setiap kongruensi adalah kernel dari homomorfisma (m,n)-*seminearring*.

Bukti: Misalkan (R, f, g) adalah (m,n)-*seminearring*. Diambil sebarang kongruensi ρ pada R. Fungsi $\varphi: R \to R/\rho$ adalah homomorfisma (Teorema 4.3) dan $\ker \varphi = \rho$. ◻

Teorema 4.5 Jika (R_1, f_1, g_1) dan (R_2, f_2, g_2) adalah dua (m,n)-*seminearring* dan $\psi: R_1 \to R_2$ adalah homomorfisma maka terdapat dengan tunggal homomorfisma injektif ψ': $R_1/\ker\psi \to R_2$ sedemikian sehingga $\psi = \psi' \circ \varphi$, dimana φ adalah homomorfisma natural.

Bukti: Misalkan $\rho = \ker\psi$ dan didefinisikan fungsi ψ': $R_1/\rho \to R_2$ dengan $\psi'(\rho(x)) \coloneqq \psi(x)$. Misalkan $x, y \in R_1$, $\rho(x) = \rho(y) \Leftrightarrow x\rho y \Leftrightarrow \psi(x) = \psi(y) \Leftrightarrow \psi'(\rho(x)) = \psi'(\rho(y))$. Oleh karena itu, ψ' bersifat *welldefined* dan injektif. Selanjutnya, diambil sebarang $\rho(a_1), \dots, \rho(a_m) \in R/\rho$,

$$\begin{aligned}\psi'\left(f_0\big(\rho(a_1), \dots, \rho(a_m)\big)\right) &= \psi'\left(\rho\big(f_1(a_1^m)\big)\right)\\ &= \psi\big(f_1(a_1^m)\big)\\ &= f_2\big(\psi(a_1), \dots, \psi(a_m)\big)\\ &= f_2\left(\psi'\big(\rho(a_1)\big), \dots, \psi'\big(\rho(a_m)\big)\right).\end{aligned} \tag{23}$$

Dengan cara yang serupa dapat dibuktikan bahwa ψ' mengawetkan operasi perkalian. Terakhir, misal fungsi $\psi": R_1/\rho \to R_2$ adalah homomorfisma yang memenuhi $\psi = \psi'' \circ \varphi$. Diambil sebarang $\rho(t) \in R_1/\rho$. Perhatikan bahwa, $\psi"(\rho(t)) = \psi(t) = \psi'(\varphi(t)) = \psi'(\rho(t))$. Jadi, terbukti bahwa $\psi" = \psi'$. ◻

Teorema 4.6 (Teorema Fundamental Homomorfisma (m,n)-*seminearring*) Jika tripel (R_1, f_1, g_1) dan (R_2, f_2, g_2) adalah dua (m,n)-*seminearring* dan $\psi: R_1 \to R_2$ adalah homomorfisma maka $R_1/\ker\psi \cong \psi(R_1)$.

Bukti: Tripel $(\psi(R_1), f_2, g_2)$ adalah (m,n)-*subseminearring* dari (R_2, f_2, g_2) [13]. Fungsi $\psi: R_1 \to \psi(R_1)$ adalah homomorfisma surjektif. Berdasarkan Teorema 4.5, terdapat dengan tunggal homomorfisma injektif $\psi': R_1/\ker\psi \to \psi(R_1)$. Diberikan sebarang $y \in \psi(R_1)$. Akibatnya, $y = \psi(x)$ untuk suatu $x \in R_1$. Oleh karena itu, $y = \psi(x) = \psi'(\ker\psi\,(x))$. Jadi, terbukti bahwa $R_1/\ker\psi \cong \psi(R_1)$. ◻

Teorema 4.7 Jika (R, f, g) adalah (m,n)-*seminearring* dan $\rho, \sigma \in \mathrm{Con}(R)$ sedemikian sehingga $\sigma \subseteq \rho$ maka

$$\begin{aligned}\rho/\sigma &\coloneqq \left\{\big(\sigma(x), \sigma(y)\big) \in (R/\sigma)^2 \middle| x\rho y\right\}\\ &\quad \in \mathrm{Con}(R/\sigma)\end{aligned} \tag{24}$$

dan $(R/\sigma)/(\rho/\sigma) \cong R/\rho$.

Bukti: Karena $\rho, \sigma \in \mathrm{Con}(R)$, $(R/\sigma, f_0, g_0)$ dan $(R/\rho, f_0', g_0')$ adalah dua (m,n)-*seminearring* kuosien (Teorema 3.10). Cukup jelas $\rho/\sigma \in \mathrm{Eq}(R/\sigma)$. Diberikan sebarang $\sigma(a_i)$, $\sigma(b_i)$, $\sigma(c_j)$, $\sigma(d_j) \in R/\sigma$ dengan $\sigma(a_i)\, \rho/\sigma\, \sigma(b_i)$ dan $\sigma(c_j)\, \rho/\sigma\, \sigma(d_j)$ untuk setiap $1 \le i \le m$ dan $1 \le j \le n$. Hal ini mengakibatkan $a_i\rho b_i$ dan $c_j\rho d_j$. Karena $\rho \in \mathrm{Con}(R)$, $f(a_1^m)\rho f(b_1^m)$ dan $g(c_1^n)\ \rho g(d_1^n)$. Oleh karena itu, $\sigma\big(f(a_1^m)\big)\, \rho/\sigma\, \sigma\big(f(b_1^m)\big)$ dan $\sigma\big(g(c_1^n)\big)\, \rho/\sigma\, \sigma\big(g(d_1^n)\big)$. Dengan demikian,

$$\begin{aligned}&f_0\big(\sigma(a_1), \dots, \sigma(a_m)\big)\\ &\quad \rho/\sigma\, f_0\big(\sigma(b_1), \dots, \sigma(b_m)\big)\end{aligned} \tag{25}$$

dan

$$\begin{aligned}&g_0\big(\sigma(c_1), \dots, \sigma(c_n)\big)\\ &\quad \rho/\sigma\, g_0\big(\sigma(d_1), \dots, \sigma(d_n)\big).\end{aligned} \tag{26}$$

Jadi, ρ/σ adalah kongruensi pada R/σ.

Diberikan fungsi $\omega: R/\sigma \to R/\rho$ dengan definisi $\omega(\sigma(x)) \coloneqq \varphi(x)$, dimana $\varphi: R \to R/\rho$ adalah homomorfisma natural. Diambil sebarang $\sigma(x), \sigma(y) \in R/\sigma$ dengan $\sigma(x) = \sigma(y)$. Hal ini mengakibatkan $(x, y) \in \sigma \subseteq \rho$. Oleh karena itu, $\rho(x) = \rho(y)$ dan diperoleh $\omega(\sigma(x)) = \omega(\sigma(y))$. Diambil sebarang $\rho(a) \in R/\rho$. Perhatikan bahwa, $\rho(a) = \varphi(a) = \omega(\sigma(a))$. Dengan demikian, ω bersifat *welldefined* dan surjektif. Diberikan sebarang $\sigma(a_1), \dots, \sigma(a_m) \in R/\sigma$,

$$\begin{aligned}\omega\left(f_0\big(\sigma(a_1), \dots, \sigma(a_m)\big)\right) &= \omega\big(\sigma(f(a_1^m))\big)\\ &= \varphi\big(f(a_1^m)\big)\\ &= f_0'\big(\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_m)\big)\\ &= f_0'\left(\omega\big(\sigma(a_1)\big), \dots, \omega\big(\sigma(a_m)\big)\right).\end{aligned} \tag{27}$$

Dengan cara yang serupa dapat dibuktikan bahwa ω mengawetkan operasi perkalian.

Akan ditunjukkan $\ker\omega = \rho/\sigma$. Perhatikan bahwa,

$$
\begin{aligned}
\ker\omega &= \{(\sigma(x),\sigma(y)) | \omega(\sigma(x)) = \\
&\qquad \omega(\sigma(y))\} \\
&= \{(\sigma(x),\sigma(y)) | \varphi(x) = \varphi(y)\} \\
&= \{(\sigma(x),\sigma(y)) | \rho(x) = \rho(y)\} \\
&= \{(\sigma(x),\sigma(y)) | x\rho y\} \\
&= \rho/\sigma. \qquad (28)
\end{aligned}
$$

Karena $\omega: R/\sigma \to R/\rho$ adalah homomorfisma surjektif dan $\ker\omega = \rho/\sigma$, berdasarkan Teorema 4.6, diperoleh bahwa $(R/\sigma)/(\rho/\sigma) \cong \omega(R/\sigma) = R/\rho$.

□

Akibat 4.8 Jika (R,f,g) adalah (m,n)-*seminearring* dan $\rho_1^s \in \mathrm{Con}(R)$ dengan $\rho_1 \subseteq \rho_2 \subseteq \cdots \subseteq \rho_s$ maka untuk setiap $1 \le i < j \le s$,

$$\rho_j/\rho_i := \{(\rho_i(x),\rho_i(y)) | x\rho_j y\} \qquad (29)$$

adalah kongruensi pada R/ρ_i.

Definisi 4.9 Misalkan R adalah (m,n)-*seminearring*, $S \subseteq R$, dan $\rho \in \mathrm{Con}(R)$. Didefinisikan himpunan, dinotasikan S^ρ, adalah

$$S^\rho := \bigcup_{a\in S} \rho(a) \qquad (30)$$

Didefinisikan relasi restriksi ρ untuk S, dinotasikan dengan $\rho|_S$, adalah

$$\rho|_S := \rho \cap S^2 \qquad (31)$$

Lema 4.10 Jika (R,f,g) adalah (m,n)-*seminearring*, (S,f,g) adalah (m,n)-*subsemine arring* dari (R,f,g), dan $\rho \in \mathrm{Con}(R)$ maka

1) (S^ρ,f,g) adalah (m,n)-*subseminearring* dari (R,f,g);
2) $\rho|_S \in \mathrm{Con}(S)$;
3) $\rho|_{S^\rho} \in \mathrm{Con}(S^\rho)$.

Bukti: 1) Diketahui $S \ne \emptyset$, sehingga terdapat $a \in S$. Karena $\rho \in \mathrm{Eq}(R)$, maka $a \in \rho(a)$. Oleh karena itu, $S^\rho \ne \emptyset$. Diambil sebarang $a_1^m, b_1^n \in S^\rho$. Akibatnya, $a_i \in \rho(x_i)$ dan $b_j \in \rho(y_j)$ untuk suatu $x_i, y_j \in S$ $(1 \le i \le m, 1 \le j \le n)$. Oleh karena itu, $a_i\rho x_i$ dan $b_j\rho y_j$. Karena (S,f,g) adalah (m,n)-*subseminearring*, $f(x_1^m), g(y_1^n) \in S$. Selanjutnya, karena $\rho \in \mathrm{Con}(R)$, diperoleh $f(a_1^m)\rho f(x_1^m)$ dan $g(b_1^n)\rho g(y_1^n)$. Dengan demikian, $f(a_1^m) \in \rho(f(x_1^m))$ dan $g(b_1^n) \in \rho(g(y_1^n))$. Dari sini dapat disimpulkan $f(a_1^m), g(b_1^n) \in S^\rho$.

2) Jelas $\rho|_S \in \mathrm{Eq}(S)$. Diambil sebarang $a_1^m, b_1^m, c_1^n, d_1^n \in S$ dengan sifat $a_i\rho|_S b_i$ dan $c_j\rho|_S d_j$ untuk setiap $1 \le i \le m$ dan $1 \le j \le n$. Akibatnya, diperoleh $a_i\rho b_i$, dan $c_j\rho d_j$. Karena (S,f,g) adalah (m,n)-*subseminear-ring*, $(f(a_1^m), f(b_1^m)), (g(c_1^n), g(d_1^n)) \in S^2$. Karena $\rho \in \mathrm{Con}(R)$, maka $f(a_1^m)\rho f(b_1^m)$ dan $g(c_1^n)\rho g(d_1^n)$. Dengan demikian, $f(a_1^m)$ $\rho|_S f(b_1^m)$ dan $g(c_1^n)\rho|_S g(d_1^n)$. Jadi, $\rho|_S \in \mathrm{Con}(S)$.

3) Karena (S^ρ,f,g) adalah suatu (m,n)-*subseminearring* dan $\rho \in \mathrm{Con}(R)$, menurut poin 2) diperoleh $\rho|_{S^\rho} \in \mathrm{Con}(S^\rho)$. □

Teorema 4.11 Jika (R,f,g) adalah (m,n)-*seminearring*, tripel (S,f,g) adalah (m,n)-*subseminearring* dari (R,f,g), dan ρ adalah kongruensi pada R maka

$$S/\rho|_S \cong S^\rho/\rho|_{S^\rho} \qquad (32)$$

Bukti: Karena relasi $\rho|_S \in \mathrm{Con}(S)$ dan $\rho|_{S^\rho} \in \mathrm{Con}(S^\rho)$ (Lema 4.10), berdasarkan Teorema 3.10, dapat dikonstruksi (m,n)-*seminearring* $(S/\rho|_S, f_0, g_0)$ dan $(S^\rho/\rho|_{S^\rho}, f_0', g_0')$. Diberikan fungsi $\alpha: S/\rho|_S \to S^\rho/\rho|_{S^\rho}$ dengan definisi $\alpha(\rho|_S(x)) := \rho|_{S^\rho}(x)$. Diambil sebarang $\rho|_S(x), \rho|_S(y) \in S/\rho|_S$ dengan $\rho|_S(x) = \rho|_S(y)$. Ini berarti bahwa $x\rho|_S y$ dan diperoleh $x\rho y$. Karena $x,y \in S$, $x \in \rho(x)$, dan $y \in \rho(x)$ maka $(x,y) \in (S^\rho)^2$. Dengan demikian, $x\rho|_{S^\rho} y$. Dari sini dapat disimpulkan $\rho|_{S^\rho}(x) = \rho|_{S^\rho}(y)$. Jadi, α bersifat *well-defined*.

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa α bersifat bijektif. Asumsikan $\rho|_S(x), \rho|_S(y) \in S/\rho|_S$ dengan sifat $\alpha(\rho|_S(x)) = \alpha(\rho|_S(y))$. Akibatnya, $\rho|_{S^\rho}(x) = \rho|_{S^\rho}(y)$. Oleh karena itu, $x\rho|_{S^\rho} y$. Dengan demikian, diperoleh $x\rho y$. Karena $(x,y) \in \rho$ dan $(x,y) \in S^2$, maka $(x,y) \in \rho|_S$. Dengan kata lain, $\rho|_S(x) = \rho|_S(y)$. Jadi, α bersifat injektif. Diambil sebarang $\rho|_{S^\rho}(a) \in S^\rho/\rho|_{S^\rho}$. Karena $a \in S^\rho$, maka $a \in \rho(t)$ untuk suatu $t \in S$. Ini berarti, $\rho(a) = \rho(t) \in S/\rho$, yang berakibat $\rho|_{S^\rho}(t) = \rho|_{S^\rho}(a)$. Karena $t \in S$, haruslah $\rho|_S(t) \in S/\rho|_S$. Akibatnya, terdapat $\rho|_S(t) \in S/\rho|_S$ sedemikian hingga $\alpha(\rho|_S(t)) = \rho|_{S^\rho}(t) = \rho|_{S^\rho}(a)$. Jadi, α bersifat surjektif. Dari sini terbukti α bersifat bijektif.

Diambil sebarang $\rho|_S(a_1), \dots, \rho|_S(a_m) \in S/\rho|_S$,

$$
\begin{aligned}
&\alpha\Big(f_0\big(\rho|_S(a_1), \dots, \rho|_S(a_m)\big)\Big)\\
&\quad = \alpha\Big(\rho|_S\big(f(a_1^m)\big)\Big)\\
&\quad = \rho|_{S^\rho}\big(f(a_1^m)\big)\\
&\quad = \rho|_{S^\rho}\big(f(a_1^m)\big)\\
&\quad = f_0'\big(\rho|_{S^\rho}(a_1), \dots, \rho|_{S^\rho}(a_m)\big)\\
&\quad = f_0'\big(\alpha\big(\rho|_S(a_1)\big), \dots,\\
&\qquad \alpha\big(\rho|_S(a_m)\big)\big). \qquad (33)
\end{aligned}
$$

Dengan cara yang sama, mudah dibuktikan bahwa α mengawetkan operasi perkalian. Jadi, terbukti bahwa $S/\rho|_S \cong S^\rho/\rho|_{S^\rho}$. ◻

Teorema 4.12 Misalkan $(R_1, f_1 g_1)$ dan (R_2, f_2, g_2) adalah dua (m,n)-*seminearring*. Jika $\psi: R_1 \to R_2$ adalah homomorfisma, $\sigma \in \mathrm{Con}(R_2)$, dan $\overleftarrow{\psi}(\sigma) = \{(x,y) \in R_1^2 \mid \psi(x)\sigma\ \psi(y)\}$ maka fungsi $\psi/\sigma : R_1/\overleftarrow{\psi}(\sigma) \to R_2/\sigma$ adalah homomorfisma injektif.

Bukti: Karena relasi $\sigma \in \mathrm{Con}(R_2)$ dan $\overleftarrow{\psi}(\sigma) \in \mathrm{Con}(R_1)$, maka dapat dikonstruksi (m,n)-*seminearring* kuosien $(R_2/\sigma, f_0', g_0')$ dan $\big(R_1/\overleftarrow{\psi}(\sigma), f_0, g_0\big)$. Diberikan suatu fungsi $\psi/\sigma : R_1/\overleftarrow{\psi}(\sigma) \to R_2/\sigma$ dengan definisi

$$\psi/\sigma\Big(\overleftarrow{\psi}(\sigma)(x)\Big) \coloneqq \sigma\big(\psi(x)\big) \qquad (34)$$

untuk setiap $\overleftarrow{\psi}(\sigma)(x) \in R_1/\overleftarrow{\psi}(\sigma)$. Misalkan $\overleftarrow{\psi}(\sigma)(x), \overleftarrow{\psi}(\sigma)(y) \in R_1/\overleftarrow{\psi}(\sigma)$, $\overleftarrow{\psi}(\sigma)(x) = \overleftarrow{\psi}(\sigma)(y) \iff x\overleftarrow{\psi}(\sigma)y \iff \psi(x)\sigma\psi(y) \iff \sigma\big(\psi(x)\big) = \sigma\big(\psi(y)\big) \iff \psi/\sigma\Big(\overleftarrow{\psi}(\sigma)(x)\Big) = \psi/\sigma\Big(\overleftarrow{\psi}(\sigma)(y)\Big)$. Hal ini membuktikan bahwa ψ/σ bersifat *well-defined* dan injektif.

Diambil sebarang $\overleftarrow{\psi}(\sigma)(x_1), \overleftarrow{\psi}(\sigma)(x_2), \dots, \overleftarrow{\psi}(\sigma)(x_m) \in R_1/\overleftarrow{\psi}(\sigma)$,

$$
\begin{aligned}
&\psi/\sigma\Big(f_0\Big(\overleftarrow{\psi}(\sigma)(x_1), \dots, \overleftarrow{\psi}(\sigma)(x_m)\Big)\Big)\\
&\quad = \psi/\sigma\Big(\overleftarrow{\psi}(\sigma)\big(f_1(x_1^m)\big)\Big)\\
&\quad = \sigma\Big(\psi\big(f_1(x_1^m)\big)\Big)\\
&\quad = \sigma\Big(f_2\big(\psi(x_1), \dots, \psi(x_m)\big)\Big)\\
&\quad = f_0'\Big(\sigma\big(\psi(x_1)\big), \dots, \sigma\big(\psi(x_m)\big)\Big)\\
&\quad = f_0'\Big(\psi/\sigma\Big(\overleftarrow{\psi}(\sigma)(x_1)\Big), \dots,\\
&\qquad \psi/\sigma\Big(\overleftarrow{\psi}(\sigma)(x_m)\Big)\Big). \qquad (35)
\end{aligned}
$$

Bukti serupa, bahwa ψ/σ mengawetkan operasi perkalian.
◻

Definisi 4.13 Diberikan s (m,n)-*seminearring* $(R_1, f_1, g_1), \dots, (R_s, f_s, g_s)$. Hasil kali s (m,n)-*seminearring*, dinotasikan sebagai $\prod_{i=1}^{s} R_i$, adalah

$$\prod_{i=1}^{s} R_i \coloneqq \{(a_1^s) \mid a_i \in R_i\} \qquad (36)$$

Teorema 4.14 Jika diberikan s (m,n)-*seminearring* $(R_1, f_1, g_1), \dots, (R_s, f_s, g_s)$ dan $A \coloneqq \prod_{i=1}^{s} R_i$, maka (A, f^A, g^A) juga merupakan (m,n)-*seminearring* terhadap operasi m-*ary*

$$
\begin{aligned}
&f^A\big((a_{11}^{s1}), (a_{12}^{s2}), \dots, (a_{1m}^{sm})\big)\\
&\quad \coloneqq \big(f_1(a_{11}^{1m}), f_2(a_{21}^{2m}), \dots, f_s(a_{s1}^{sm})\big) \qquad (37)
\end{aligned}
$$

dan operasi n-*ary*

$$
\begin{aligned}
&g^A\big((b_{11}^{s1}), (b_{12}^{s2}), \dots, (b_{1n}^{sn})\big)\\
&\quad \coloneqq \big(g_1(b_{11}^{1n}), g_2(b_{21}^{2n}), \dots, g_s(b_{s1}^{sn})\big) \qquad (38)
\end{aligned}
$$

Bukti: Diberikan sebarang s-tupel $\alpha_j \in A$ $(1 \le j \le 2m-1)$ dan $1 \le k < t \le m$. Katakan $\alpha_j = \big(a_{1j}^{sj}\big)$ untuk suatu $a_{ij} \in R_i$ $(1 \le i \le s)$, didapat

$$
\begin{aligned}
&f^A\big(\alpha_1^{k-1}, f^A\big(\alpha_k^{m+k-1}\big), \alpha_{m+k}^{2m-1}\big)\\
&= f^A\Bigg(\big(a_{11}^{s1}\big), \big(a_{12}^{s2}\big), \dots, \Big(a_{1(k-1)}^{s(k-1)}\Big),\\
&\quad f^A\Big(\big(a_{1k}^{sk}\big), \Big(a_{1(k+1)}^{s(k+1)}\Big), \dots, \Big(a_{1(m+k-1)}^{s(m+k-1)}\Big)\Big),\\
&\quad \Big(a_{1(m+k)}^{s(m+k)}\Big), \Big(a_{1(m+k+1)}^{s(m+k+1)}\Big), \dots, \Big(a_{1(2m-1)}^{s(2m-1)}\Big)\Bigg)\\
&= f^A\Bigg(\big(a_{11}^{s1}\big), \big(a_{12}^{s2}\big), \dots, \Big(a_{1(k-1)}^{s(k-1)}\Big),\\
&\quad \Big(f_1\Big(a_{1k}^{1(m+k-1)}\Big), f_2\Big(a_{2k}^{2(m+k-1)}\Big),\\
&\quad \dots, f_s\Big(a_{sk}^{s(m+k-1)}\Big)\Big), \Big(a_{1(m+k)}^{s(m+k)}\Big),\\
&\quad \Big(a_{1(m+k+1)}^{s(m+k+1)}\Big), \dots, \Big(a_{1(2m-1)}^{s(2m-1)}\Big)\Bigg)\\
&= \Bigg(f_1\Big(a_{11}^{1(k-1)}, f_1\Big(a_{1k}^{1(m+k-1)}\Big),\\
&\quad a_{1(m+k)}^{1(2m-1)}\Big),\ f_2\Big(a_{21}^{2(k-1)},\\
&\quad f_2\Big(a_{2k}^{2(m+k-1)}\Big), a_{2(m+k)}^{2(2m-1)}\Big), \dots,\\
&\quad f_s\Big(a_{s1}^{s(k-1)}, f_s\Big(a_{sk}^{s(m+k-1)}\Big),\\
&\quad a_{s(m+k)}^{s(2m-1)}\Big)\Bigg)
\end{aligned}
$$

$$= \Big(f_1 \Big(a_{11}^{1(t-1)}, f_1\Big(a_{1k}^{1(m+t-1)} \Big), a_{1(m+t)}^{1(2m-1)} \Big),\ f_2\Big(a_{21}^{2(t-1)}, f_2\Big(a_{2t}^{2(m+t-1)} \Big), a_{2(m+t)}^{2(2m-1)} \Big), \dots, f_s \Big(a_{s1}^{s(t-1)}, f_s\Big(a_{st}^{s(m+t-1)} \Big), a_{s(m+t)}^{s(2m-1)} \Big) \Big)$$

$$= f^A \Big((a_{11}^{s1}), (a_{12}^{s2}), \dots, \Big(a_{1(t-1)}^{s(t-1)} \Big), \Big(f_1\Big(a_{1t}^{1(m+t-1)} \Big), f_2\Big(a_{2t}^{2(m+t-1)} \Big), \dots, f_s\Big(a_{st}^{s(m+t-1)} \Big) \Big), \Big(a_{1(m+t)}^{s(m+t)} \Big), \Big(a_{1(m+t+1)}^{s(m+t+1)} \Big), \dots, \Big(a_{1(2m-1)}^{s(2m-1)} \Big) \Big)$$

$$= f^A(\alpha_1^{t-1}, f^A(\alpha_t^{m+t-1}), \alpha_{m+t}^{2m-1}). \qquad (39)$$

Dengan demikian f^A bersifat (k,t)-asosiatif. Jadi, terbukti (A, f^A) adalah m-semigrup. Dengan cara yang sama dapat dibuktikan (A, g^A) adalah n-semigrup.

Diberikan sebarang α_1^m, $\beta_1^{n-1} \in A$. Kata takan $\alpha_j = \big(a_{1j}^{sj}\big)$ dan $\beta_k = \big(b_{1k}^{sk}\big)$ untuk suatu $a_{lj} \in R_l$ $(1 \le j \le m, 1 \le l \le s)$ dan $b_{pk} \in R_p$ $(1 \le k < n, 1 \le p \le s)$, diperoleh

$$g^A\big(\beta_1^{n-1}, f^A(\alpha_1^m)\big)$$

$$= g^A \Big((b_{11}^{s1}), (b_{12}^{s2}), \dots, \Big(b_{1(n-1)}^{s(n-1)} \Big), f^A\big((a_{11}^{s1}), (a_{12}^{s2}), \dots, (a_{1m}^{sm}) \big) \Big)$$

$$= g^A \Big((b_{11}^{s1}), (b_{12}^{s2}), \dots, \Big(b_{1(n-1)}^{s(n-1)} \Big), \big(f_1(a_{11}^{1m}), f_2(a_{21}^{2m}), \dots, f_s(a_{s1}^{sm}) \big) \Big)$$

$$= \Big(g_1 \Big(b_{11}^{1(n-1)}, f_1(a_{11}^{1m}) \Big), g_2\Big(b_{21}^{2(n-1)}, f_2(a_{21}^{2m}) \Big), \dots, g_s \Big(b_{s1}^{s(n-1)}, f_s(a_{21}^{2m}) \Big) \Big)$$

$$= \Big(f_1 \Big(g_1\Big(b_{11}^{1(n-1)}, a_{11} \Big), g_1\Big(b_{11}^{1(n-1)}, a_{12} \Big), \dots, g_1\Big(b_{11}^{1(n-1)}, a_{1m} \Big) \Big), f_2 \Big(g_2\Big(b_{21}^{2(n-1)}, a_{21} \Big), g_2\Big(b_{21}^{2(n-1)}, a_{22} \Big), \dots, g_2\Big(b_{21}^{2(n-1)}, a_{2m} \Big) \Big), \dots, f_s \Big(g_s\Big(b_{s1}^{s(n-1)}, a_{s1} \Big), g_s\Big(b_{s1}^{s(n-1)}, a_{s2} \Big), \dots, g_s\Big(b_{s1}^{s(n-1)}, a_{sm} \Big) \Big) \Big)$$

$$= f^A \Big(\Big(g_1\Big(b_{11}^{1(n-1)}, a_{11} \Big), g_1\Big(b_{11}^{1(n-1)}, a_{12} \Big), \dots, g_1\Big(b_{11}^{1(n-1)}, a_{1m} \Big) \Big), \Big(g_2\Big(b_{21}^{2(n-1)}, a_{21} \Big), g_2\Big(b_{21}^{2(n-1)}, a_{22} \Big), \dots, g_s\Big(b_{s1}^{s(n-1)}, a_{sm} \Big) \Big) \Big)$$

$$= f^A \Big(g^A \Big((b_{11}^{s1}), (b_{12}^{s2}), \dots, \Big(b_{1(n-1)}^{s(n-1)} \Big), (a_{11}^{s1}) \Big),\ g^A \Big((b_{11}^{s1}), (b_{12}^{s2}), \dots, \Big(b_{1(n-1)}^{s(n-1)} \Big), (a_{12}^{s2}) \Big), \dots, g^A\Big((b_{11}^{s1}), (b_{12}^{s2}), \dots, \Big(b_{1(n-1)}^{s(n-1)} \Big), (a_{1m}^{sm}) \Big)$$

$$= f^A(g^A(\beta_1^{n-1}, \alpha_1), g^A(\beta_1^{n-1}, \alpha_2), \dots, g^A(\beta_1^{n-1}, \alpha_m)). \qquad (40)$$

Dengan demikian, g^A bersifat distributif kiri terhadap f^A. Jadi, terbukti (A, f^A, g^A) adalah (m,n)-*seminearring*. □

Teorema 4.15 Jika diberikan s (m,n)-*seminearring* $(R_1, f_1, g_1), \dots, (R_s, f_s, g_s)$ dan $A \coloneqq \prod_{i=1}^s R_i$, maka

1) $\pi_i : A \to R_i$ dengan definisi $\pi_i(x_1^s) \coloneqq x_i$ adalah homomorfisma surjektif;
2) $\bigcap_{i=1}^s \ker \pi_i = \Delta_A$.

Bukti: 1) Sudah jelas. 2) Diberikan sebarang $\big((x_1^s), (y_1^s)\big) \in \bigcap_{i=1}^s \ker \pi_i$, yang berarti bahwa $\big((x_1^s), (y_1^s)\big) \in \ker \pi_i$ untuk setiap $1 \le i \le s$. Oleh karena itu, diperoleh $\pi_i(x_1^s) = \pi_i(y_1^s)$. Dengan kata lain, $x_i = y_i$ untuk setiap $1 \le i \le s$. Dengan demikian, $\big((x_1^s), (y_1^s)\big) = \big((y_1^s), (y_1^s)\big) \in \Delta_A$. Sebaliknya, diambil sebarang $\big((a_1^s), (b_1^s)\big) \in \Delta_A$. Akibatnya, $a_i = b_i$ untuk setiap $1 \le i \le s$. Oleh karena itu, $\pi_i(a_1^s) = \pi_i(b_1^s)$. Dengan demikian, diperoleh $\big((a_1^s), (b_1^s)\big) \in \ker \pi_i$ untuk setiap $1 \le i \le s$. Jadi, $\big((a_1^s), (b_1^s)\big) \in \bigcap_{i=1}^s \ker \pi_i$. □

Teorema 4.16 Jika (R, f, g) adalah (m,n)-*seminearring* dan $\rho_1^s \in \mathrm{Con}(R)$, maka terdapat homomorfisma injektif dari $R/\bigcap_{i=1}^s \rho_i$ ke $\prod_{i=1}^s R/\rho_i$.

Bukti: Karena $\rho_1^s \in \mathrm{Con}(R)$, maka dapat dibentuk s (m,n)-*seminearring* kuosien $(R/\rho_i, f_i', g_i')$. Misalkan $A \coloneqq \prod_{i=1}^s R/\rho_i$, berdasarkan Teorema 4.14, (A, f^A, g^A) adalah (m,n)-*seminearring* bersama operasi *componentwise*. Diberikan fungsi $\psi: R \to A$ dengan definisi $\psi(x) \coloneqq \big(\rho_1(x), \dots, \rho_s(x)\big)$. Diambil sebarang $x, y \in R$ dengan $x = y$. Akibatnya, $x \rho_i y$ untuk setiap $1 \le i \le s$, sehingga diperoleh $\rho_i(x) = \rho_j(y)$. Oleh karena itu, $(\rho_1(x), \dots, \rho_s(x)) = (\rho_1(y), \dots, \rho_s(y))$. Jadi, ψ bersifat *welldefined*.

Akan ditunjukkan $\ker\psi = \bigcap_{i=1}^{s} \rho_i$. Diambil sebarang $(x, y) \in \ker\psi$. Akibatnya, $\psi(x) = \psi(y)$. Oleh karena itu, $(\rho_1(x), \dots, \rho_s(x)) = (\rho_1(y), \dots, \rho_s(y))$. Ini berarti $(x, y) \in \rho_i$ untuk setiap $1 \leq i \leq s$. Jadi, $(x, y) \in \bigcap_{i=1}^{s} \rho_i$. Diambil sebarang $(a, b) \in \bigcap_{i=1}^{s} \rho_i$, yang berarti $(a, b) \in \rho_i$ untuk setiap $1 \leq i \leq s$. Oleh karena itu, $\rho_i(a) = \rho_i(b)$ untuk setiap $1 \leq i \leq s$. Dengan demikian, $(\rho_1(a), \dots, \rho_s(a)) = (\rho_1(b), \dots, \rho_s(b))$. Dengan kata lain, $\psi(a) = \psi(b)$. Jadi, $(a, b) \in \ker\psi$.

Selanjutnya, akan ditunjukkan ψ mengawetkan operasi penjumlahan. Diambil sebarang $x_1^m \in R$,

$$\begin{aligned}
&\psi(f(x_1^m)) \\
&\quad = \left(\rho_1(f(x_1^m)), \dots, \rho_s(f(x_1^m))\right) \\
&\quad = \big(f_1'(\rho_1(x_1), \dots, \rho_s(x_m)), \\
&\qquad f_2'(\rho_2(x_1), \dots, \rho_2(x_m)), \dots, \\
&\qquad f_s'(\rho_s(x_1), \dots, \rho_s(x_m))\big) \\
&\quad = f^A\big((\rho_1(x_1), \dots, \rho_s(x_1)), \\
&\qquad (\rho_1(x_2), \dots, \rho_s(x_2)), \dots, \\
&\qquad (\rho_1(x_m), \dots, \rho_s(x_m))\big) \\
&\quad = f^A(\psi(x_1), \dots, \psi(x_m)). \qquad (41)
\end{aligned}$$

Dengan cara yang sama bisa dibuktikan bahwa ψ mengawetkan operasi perkalian. Berdasarkan Teorema 4.5, terdapat homomorfisma injektif dari $R/\bigcap_{i=1}^{s} \rho_i$ ke $\prod_{i=1}^{s} R/\rho_i$. □

5. Penutup

Berdasarkan pembahasan di atas dapat disimpulkan beberapa sifat-sifat kongruensi pada (m, n)-*seminearring* yang berkaitan dengan homomorfisma. Pertama, jika diberikan sebarang dua (m, n)-*seminearring* (R_1, f_1, g_1) dan (R_2, f_2, g_2), (m, n)-*subseminearring* (S, f_1, g_1) dari (R_1, f_1, g_1), kongruensi ρ dan θ pada R_1 sedemikian sehingga $\theta \subseteq \rho$, dan kongruensi σ pada R_2 maka homomorfisma $\psi: R_1 \to R_2$ akan menghasilkan $\ker\psi$ dan $\overleftarrow{\psi}(\sigma)$ sebagai kongruensi pada R_1, serta $\vec{\psi}(\rho)$ sebagai kongruensi pada R_2. Selain itu, ρ/θ sebagai kongruensi pada R_1/θ, dan relasi restriksi $\rho|_S$ dan $\rho|_{S^\rho}$ berturut-turut adalah kongruensi pada S dan S^ρ. Selanjutnya, homomorfisma ψ bersifat injektif jika dan hanya jika $\ker\psi = \Delta_{R_1}$. Setiap kongruensi merupakan kernel dari suatu homomorfisma. Terdapat homomorfisma injektif tunggal ψ': $R_1/\ker\psi \to R_2$ sedemikian sehingga $\psi = \psi' \circ \varphi$ dan juga terdapat suatu homomorfisma injektif dari $R_1/\bigcap_{i=1}^{s} \rho_i$ ke $\prod_{i=1}^{s} R_1/\rho_i$ untuk setiap s kongruensi ρ_i pada R_1. Kemudian, ditemukan beberapa hasil mengenai dua struktur yang saling isomorfik, $R_1/\ker\psi$ isomorfik ke $\psi(R_1)$, $(R_1/\theta)/(\rho/\theta)$ isomorfik ke R_1/ρ, dan $S/\rho|_S$ isomorfik ke $S^\rho/\rho|_{S^\rho}$. Sifat-sifat ini telah dibuktikan secara rinci dan mendalam, sehingga memiliki dasar yang kuat sebagai rujukan dalam mengembangkan ilmu pengetahuan dan teknologi seperti teori otomata [1], teori grup kuantum [2], kombinatorika [3], fisika [4] [5] [6], teori pengkodean pemulihan kesalahan, pendeteksian kesalahan, kriptologi, dan teori (t, m, s)-nets [7].

Untuk penelitian lebih lanjut, masih terbuka peluang untuk memperkenalkan konsep (m, n)-*hyperseminearring* dan relasi kongruensi pada (m, n)-*hyperseminearring*, serta mengkarakterisasi kongruensi pada (m, n)-*hyperseminearring* yang berkaitan dengan homomorfisma. Sebagai terminologi dasar, dapat merujuk pada referensi [29] dan [30].

Referensi

[1] J. W. Grzymala-Busse, "Automorphisms of Polyadic Automata," *J. ACM*, vol. 16, no. 2, pp. 208–219, Apr. 1969, doi: https://doi.org/10.1145/321510.321512.

[2] D. Nikshych and L. I. Vainerman, "Finite Quantum Groupoids and Their Applications," *arXiv*, 2000, doi: https://doi.org/10.48550/arXiv.math/0006057.

[3] Z. Stojaković and W. A. Dudek, "Single Identities for Varieties Equivalent to Quadruple Systems," *Discrete Math.*, vol. 183, no. 1, pp. 277–284, 1998, doi: https://doi.org/10.1016/S0012-365X(97)00060-5.

[4] R. Kerner, "Ternary Algebraic Structures

and Their Applications in Physics," *arXiv*, p. 15, 2000, [Online]. Available: http://arxiv.org/abs/math-ph/0011023.
[5] L. Vainerman and R. Kerner, "On Special Classes of n-algebras," *J. Math. Phys.*, vol. 37, no. 5, pp. 2553–2565, 1996, doi: https://doi.org/10.1063/1.531526.
[6] A. P. Pojidaev, "Enveloping Algebras of Filippov Algebras," *Commun. Algebr.*, vol. 31, no. 2, pp. 883–900, 2003, doi: https://doi.org/10.1081/AGB-120017349.
[7] G. L. M. Charles F. Laywine, *Discrete mathematics Using Latin Squares*, 1st ed. Wiley, 1998.
[8] W. G. Lister, "Ternary Rings," *Trans. Am. Math. Soc.*, vol. 154, pp. 37–55, Jan. 1971, doi: https://doi.org/10.2307/1995425.
[9] G. Crombez and J. Timm, "On (n,m)-rings," *Abhandlungen aus dem Math. Semin. der Univ. Hambg.*, vol. 37, pp. 200–203, 1972, doi: https://doi.org/10.1007/BF02999696.
[10] T. K. Dutta and S. Kar, "On Regular Ternary Semirings," in *Proceedings of the ICM Satellite Conference in Algebra and Related Topics*, 2003, pp. 343–355, doi: https://doi.org/10.1142/9789812705808_0027.
[11] M. S. Pop and A. Pop, "Some Properties of Generalized Semirings," *Carpathian J. Math.*, vol. 24, no. 3, pp. 397–402, 2008.
[12] R. Vijayakumar and D. Bharathi, "On Ternary Seminear Rings," *Int. J. Math. Trends Technol.*, vol. 66, no. 10, pp. 170–177, 2020, doi: https://doi.org/10.14445/22315373/ijmtt-v66i10p521.
[13] M. S. L. Liedokto, "Struktur (m,n)-seminearring," in *Seminar Nasional Pendidikan Matematika (SNPM) 2023 UNIPA Surabaya*, 2023, pp. 540–552, [Online]. Available: https://snpm.unipasby.ac.id/prosiding/index.php/snpm/article/view/191.
[14] V. N. Dixit and S. Dewan, "Congruence and Green's Equivalence Relation on Ternary semigroup," *Commun. Ser. A1 Math. Stat.*, vol. 46, pp. 103–117, 1997, doi: https://doi.org/10.1501/Commua1_0000000429.
[15] A. Chronowski, "Congruences on Ternary Semigroups," *Ukr. Math. J.*, vol. 56, no. 4, pp. 662–681, 2004, doi: 10.1007/s11253-005-0010-4.
[16] S. Kar and B. Maity, "Congruences On Ternary Semigroups," *J. Chungcheong Math. Soc.*, vol. 20, pp. 191–201, Jan. 2007.
[17] C. Somsup and U. Leerawat, "Congruences and Homomorphisms on n-ary Semigroups," *Int. J. Math. Comput. Sci.*, vol. 15, no. 2, pp. 671–682, 2020.
[18] J. S. Golan, *Semirings and Their Applications*, 1st ed. Haifa: Springer, Dordrecht, 1999.
[19] S. E. Alam, S. Rao, and B. Davvaz, "(m,n)-semirings and a Generalized Fault-tolerance Algebra of Systems," *J. Appl. Math.*, vol. 2013, p. 482391, 2013, doi: https://doi.org/10.1155/2013/482391.
[20] F. Hussain, M. Tahir, S. Abdullah, and N. Sadiq, "Quotient Seminear-rings," *Indian J. Sci. Technol.*, vol. 9, no. 38, 2016, doi: https://doi.org/10.17485/ijst/2016/v9i38/89115.
[21] R. Vijayakumar and A. D. Bharathi, "Quotient Ternary Seminear Rings," *Malaya J. Mat.*, vol. 9, no. 1, pp. 715–719, 2021, doi: https://doi.org/10.26637/mjm0901/0125.
[22] M. F. Fatimah, F. Hasnani, and N. P. Puspita, "Quotient Seminear-rings of the Endomorphism of Seminear-rings," vol. 16, no. 3, pp. 887–896, 2022.
[23] C. Bergman, *Universal Algebra Fundamentals and Selected Topics*. Ames: CRC Press, 2012.
[24] K. Denecke and S. L. Wismath, *Universal Algebra and Applications in Theoretical Computer Science*. New York, 2002.
[25] W. A. Dudek, K. Glazek, and B. Gleichgewicht, "A Note on the Axioms of n-groups," *Colloq. Math. Soc. János Bolyai*, pp. 195–202, 1977, doi: 10.1177/030641909702500409.
[26] B. Gleichgewicht and K. Głazek, "Remarks on n-groups as Abstract Algebras," *Colloq. Math.*, vol. 17, no. 2, pp. 209–219, 1967.

[27] W. G. van Hoorn and B. van Rootselaar, "Fundamental Notions in the Theory of Seminearrings," *Compos. Math.*, vol. 18, pp. 65–78, 1967.

[28] T. W. Hungerford, *Algebra*, 1st ed. New York: Springer, 1974.

[29] C. Pelea, "Hyperrings and $\alpha*$-relations. A General Approach," *J. Algebr.*, vol. 383, pp. 104–128, 2013, doi: https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2013.02.025.

[30] S. Mirvakili and B. Davvaz, "Characterization of Additive (m, n)-semihyperrings," *Kyungpook Math. J.*, vol. 55, no. 3, pp. 515–530, 2015, doi: 10.5666/KMJ.2015.55.3.515.