Available online : https://doi.org/10.32665/james.v6i2.1929

Journal of Mathematics Education and Science

p-ISSN: 2621-1203 VOL. 6 NO. 2 (2023) : 93-106 e-ISSN: 2621-1211

PEWARNAAN LOKAL WILAYAH *SUPER ANTIMAGIC* TOTAL PADA GRAF TANGGA DAN GRAF TIGA TANGGA MELINGKAR

Yogie Pratama Kaindi[1], Desi Febriani Putri[2], Wasono[3]

Corresponding author : Yogie Pratama Kaindi
[1]Universitas Mulawarman, Kota Samarinda, Kalimantan Timur, 75119, yogiemaul@gmail.com
[2]Universitas Mulawarman, Kota Samarinda, Kalimantan Timur, 75119, desifebrianip@fmipa.unmul.ac.id
[3]Universitas Mulawarman, Kota Samarinda, Kalimantan Timur, 75119, wasonkhayla32@gmail.com
Received : 24 Juli 2023, Revised : 12 Oktober 2023, Accepted : 12 Oktober 2023

Abstract

Let G be a graph consisting of a set of vertices $V(G)$, a set of edges $E(G)$, and a set of regions $F(G)$, with $|V(G)| = m$, $|E(G)| = p$, and $|F(G)| = q$. A bijective function $f: V(G) \cup E(G) \cup F(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, m + p + q\}$ is called a *super* antimagic total local coloring if there exist two neighboring regions f_i and f_j such that $w(f_i) \neq w(f_j)$, where $w(f) = \Sigma\, g(v) + \Sigma\, g(e) + \Sigma\, g(f)$. The *super* antimagic total local coloring induces a coloring of the regions of G where each region f is assigned the color $w(f)$. The chromatic number of the *super* antimagic total local coloring, denoted as $\chi_{lsatf(G)}$, is the minimum number of colors required to color the regions of the graph obtained from the labeling of vertices, edges, and regions of graph G. The graphs studied in *super* antimagic total local coloring are ladder graph L_n and three circular ladder graph TCL_n,. The aim of this research is to determine the chromatic number of *super* antimagic total local coloring, $\chi_{lsatf(G)}$, for the graphs under investigation. The results of this research indicate that the chromatic numbers for ladder graph L_n and three circular ladder graph TCL_n are $\chi_{lsatf}(L_n) = 2$, $\chi_{lsatf}(TCL_n) = 3$.

Keywords : chromatic number, local super antimagic total face coloring, ladder, three circular ladder.

Abstrak

Misalkan G merupakan sebuah graf yang terdiri dari himpunan titik $V(G)$, himpunan sisi $E(G)$, dan himpunan wilayah $F(G)$, dengan $|V(G)| = m$, $|E(G)| = p$, dan $|F(G)| = q$. Fungsi bijektif $f: V(G) \cup E(G) \cup F(G) \rightarrow \{1,2,3, \dots, m + p + q\}$ disebut pewarnaan lokal wilayah *super antimagic* total jika terdapat dua wilayah bertetangga f_i dan f_j, maka $w(f_i) \neq w(f_j)$, dengan $w(f) = \Sigma\, g(v) + \Sigma\, g(e) + \Sigma\, g(f)$. Pewarnaan lokal wilayah *super antimagic* total menginduksi pewarnaan wilayah dari G, dengan setiap wilayah f diberi warna $w(f)$. Bilangan kromatik pewarnaan lokal wilayah *super antimagic* total dinotasikan $\chi_{lsatf}(G)$, adalah jumlah warna minimum pada wilayah graf yang didapatkan dari proses pelabelan titik, sisi, dan wilayah pada graf G. Penelitian ini membahas pewarnaan lokal wilayah *super antimagic* total pada graf tangga (L_n) dan graf tiga tangga melingkar (TCL_n). Graf yang diteliti pada pewarnaan lokal wilayah *super antimagic* total adalah graf tangga L_n dan graf tiga tangga melingkar TCL_n. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk menentukan bilangan kromatik pewarnaan lokal wilayah *super* antimagic total $\chi_{lsatf}(G)$ pada graf yang diteliti. Hasil penelitian menunjukkan bahwa bilangan kromatik pada graf tangga L_n dan tiga tangga melingkar TCL_n adalah $\chi_{lsatf}(L_n) = 2$, $\chi_{lsatf}(TCL_n) = 3$.

Kata kunci: bilangan kromatik, pewarnaan lokal wilayah super antimagic total, tangga, tiga tangga melingkar.

1. Pendahuluan

Matematika adalah ilmu yang telah banyak membantu manusia dalam memecahkan masalah-masalah di kehidupan sehari-hari. Masalah-masalah yang sudah terpecahkan oleh matematika di antaranya permasalahan ekonomi, komputer, statistik, penyebaran penyakit, analisis bencana alam dan permasalahan lainnya. Salah satu cabang ilmu matematika adalah teori graf.. Menurut [1], graf G terdiri dari himpunan $V = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_i\}$ yang elemennya disebut titik (juga disebut simpul atau node) dan himpunan $E = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_i\}$ yang elemennya disebut sisi (juga disebut garis atau busur) dengan himpunan $V(G)$ disebut himpunan titik pada graf G dan $E(G)$ adalah himpunan sisi pada graf G. Suatu graf dilambangkan sebagai $G = (V(G), E(G))$.

Ada beberapa kajian dalam graf yaitu pelabelan dan pewarnaan graf. Pelabelan graf adalah pemberian label pada himpunan titik, sisi, atau keduanya, pada kondisi tertentu [2]. Label yang diberikan berupa bilangan bulat positif. Pewarnaan graf adalah pemberian warna pada himpunan titik, sisi, maupun wilayah pada graf dengan syarat setiap elemen himpunan titik, sisi dan wilayah pada graf yang bertetangga memiliki warna berbeda [3].

Pada pewarnaan graf, terdapat suatu istilah bilangan kromatik. Bilangan kromatik adalah jumlah warna minimum yang dapat digunakan untuk mewarnai objek pada graf [4]. Pada pelabelan graf, terdapat juga suatu istilah berupa bobot. Nilai bobot adalah hasil penjumlahan label di sekitar objek berupa titik, sisi, dan wilayah yang dihitung nilai bobotnya. Jika mencari bobot dari sisi, maka hasil bobot sisi merupakan hasil penjumlahan label titik di sisi tersebut. Jika mencari bobot dari titik, maka hasil bobot titik merupakan hasil penjumlahan label sisi di titik tersebut. Jika mencari bobot dari wilayah, maka hasil bobot wilayah merupakan hasil penjumlahan label titik dan sisi di wilayah tersebut.

Salah satu topik yang berkembang tentang pelabelan dan pewarnaan graf adalah pewarnaan lokal *antimagic*. Pewarnaan lokal *antimagic* graf diperkenalkan oleh Arumugam.dkk pada tahun 2017 dengan melakukan pelabelan sisi pada sebuah graf kemudian mencari bobot titik dari graf tersebut [5]. Bobot-bobot tersebut selanjutnya dijadikan sebagai warna pada graf sehingga untuk setiap titik yang bertetangga harus memiliki bobot yang berbeda. Pewarnaan *antimagic* pada graf juga terdapat suatu istilah bilangan kromatik dengan notasi $\chi_{la}(G)$. Bilangan kromatik pada graf merupakan banyaknya warna minimum pada graf.

Pewarnaan *antimagic* telah banyak diteliti oleh para peneliti-peneliti sebelumnya seperti [5], [6], [7] dan [8] yang meneliti pewarnaan titik *antimagic*, [9], [10], [11] dan [12] yang meneliti pewarnaan lokal sisi *antimagic*, [13] dan [14] yang meneliti pewarnaan lokal wilayah *antimagic* dan masih banyak lagi peneliti yang meneliti pewarnaan lokal *antimagic*. Pada hasil pewarnaan lokal *antimagic* sebelumnya, untuk pewarnaan lokal wilayah *super antimagic* total dari graf tangga dan graf tiga tangga melingkar belum diteliti oleh peneliti sebelumnya.

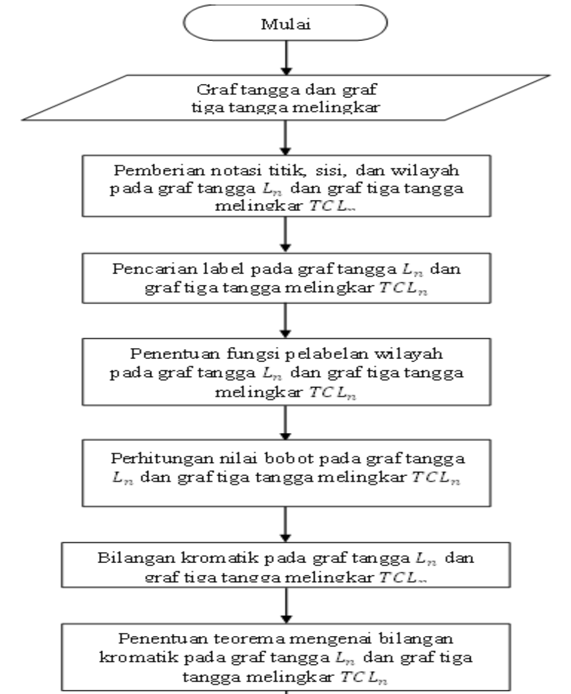
Berdasakan uraian sebelumnya, peneliti tertarik untuk melakukan penelitian mengenai pewarnaan lokal *antimagic,* khususnya pewarnaan lokal wilayah *super antimagic* total. Pewarnaan lokal wilayah *super antimagic* total merupakan pelabelan dengan fungsi bijektif yang himpunan titik, sisi, dan wilayahnya dipetakan ke bilangan-bilangan asli dari angka 1 sampai semua himpunan titik, sisi, dan wilayah pada graf tersebut terisi label. Jumlah dari label tersebut menghasilkan bobot pada tiap-tiap wilayah dengan syarat wilayah yang bertetangga tidak boleh memiliki bobot yang sama. Pada penelitian ini, pelabelan dimulai dari semua himpunan titik terlebih dahulu, kemudian semua himpunan sisi, dan yang terakhir dilabeli adalah semua himpunan wilayah. Wilayah yang digunakan pada penelitian ini hanya wilayah dalam graf. Wilayah dalam graf merupakan wilayah yang berada di dalam graf yang dibatasi oleh himpunan titik dan himpunan sisi. Graf yang diteliti yaitu graf tangga dan graf tiga tangga melingkar. Graf tangga dan graf tiga tangga melingkar dipilih dalam penelitian ini dikarenakan graf tersebut memiliki wilayah yang dapat digunakan dalam penelitian pewarnaan lokal wilayah *super antimagic* total. Oleh karena itu, peneliti memilih judul "Pewarnaan Lokal Wilayah *Super Antimagic* Total pada Graf Tangga dan Graf Tiga Tangga Melingkar".

2. Metode

Pada penelitian ini, metode yang digunakan adalah dengan mempelajari studi literatur berupa buku atau makalah yang berkaitan dengan topik penelitian berupa pelabelan dan pewarnaan graf. Setelah itu, hasil mempelajari studi literatur tersebut digunakan sebagai landasan teori untuk mengembangkan teori pelabelan dan pewarnaan graf khususnya dari graf tangga dan tiga tangga melingkar yang dinyatakan dalam bentuk teorema.

3. Pembahasan

Pada bagian ini, membahas mengenai hasil penelitian dari pewarnaan lokal wilayah *super antimagic* total pada graf tangga dan graf tiga tangga melingkar yang dinyatakan dalam bentuk teorema serta pembuktiannya. Tahapan penelitian disajikan pada Gambar 1.

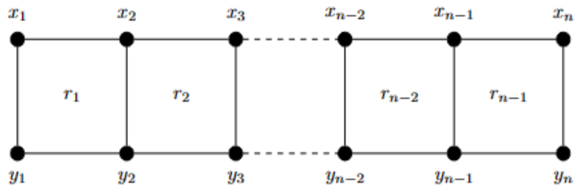


Gambar 1. Tahapan Penelitian L_n

3.1 Graf Tangga

Definisi 3.1 [15] *Graf tangga adalah graf hasil kali kartesian $P_n \times P_2$ dengan P_n merupakan graf lintasan dengan titik sebanyak n dan P_2 merupakan graf lintasan dengan titik sebanyak 2 titik.*

Graf tangga dinotasikan dengan L_n dengan $n \geq 2$. Graf tangga memiliki jumlah titik sebanyak $2n$ titik dan jumlah sisi sebanyak $3n-2$ sisi. Representasi dari graf tangga L_n dapat dilihat pada Gambar 2.



Gambar 2. Graf Tangga L_n

Pada bagian ini, graf tangga L_n dikonstruksi dengan menggunakan pewarnaan lokal wilayah *super antimagic* total. Oleh karena itu, proses pencarian bilangan kromatik pewarnaan lokal wilayah *super antimagic* pada graf tangga L_n adalah sebagai berikut:

Teorema 1. *Graf tangga L_n dengan n adalah bilangan asli dan $n \geq 3$ memiliki bilangan kromatik pewarnaan lokal wilayah super antimagic total $\chi_{lsatf} = 2$.*

Bukti. Diberikan graf tangga L_n dengan n adalah bilangan asli dan $n \geq 3$. Menurut definisi graf tangga L_n, himpunan titik pada graf tangga L_n dapat dinotasikan sebagai berikut:

$$V(L_n) = \{x_i : 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_i : 1 \leq i \leq n\},$$

Berdasarkan penotasian himpunan titik pada graf tangga L_n, maka pasangan himpunan titik yang terhubung disebut sebagai himpunan sisi. Himpunan sisi pada graf tangga L_n dapat dinotasikan sebagai berikut:

$$E(L_n) = \{x_i x_{i+1} : 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{y_i y_{i+1} : 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_i y_i : 1 \leq i \leq n\},$$

Berdasarkan definisi wilayah pada graf, suatu wilayah dalam pada graf dibatasi oleh sub himpunan titik dan sub himpunan sisi dari graf tersebut. Oleh karena itu, dari himpunan titik dan himpunan sisi yang telah diperoleh, terbentuklah himpunan wilayah pada graf tangga $L_n$sebagai berikut:

$$F(L_n) = \{r_i : 1 \leq i \leq n-1\}.$$

Graf tangga L_n memiliki kardinalitas titik $|V(L_n)| = 2n$, kardinalitas sisi $|E(L_n)| = 3n - 2$, dan kardinalitas wilayah $|F(L_n)| = n - 1$. Didefinisikan fungsi bijektif pelabelan graf tangga L_n yaitu $g(V(L_n) \cup E(L_n) \cup F(L_n) \to \{1,2,\dots,6n-3\}$.

Selanjutnya, proses menentukan label pada himpunan titik, sisi, dan wilayah dari graf tangga L_n. Pada graf tangga L_n terdapat 2 kasus untuk menentukan bilangan kromatik pewarnaan lokal wilayah super antimagic total.

Kasus 1. Pada kasus n ganjil, ditentukan label pada himpunan titik, sisi dan wilayah dari graf tangga L_n. Pertama, dilabeli semua himpunan titik pada graf tangga L_n. Himpunan titik pada graf tangga L_n dilabeli dengan label $\{1,2,\dots,2n\}$. Himpunan titik x_i dengan i ganjil, dilabeli dengan label $\{1,3,\dots,n\}$. Mengingat bahwa indeks i pada himpunan titik x_i adalah ganjil, indeks i dapat diubah menjadi $2k-1$ untuk $k = 1,\dots,\frac{n+1}{2}$. Sehingga diperoleh

$$g(x_i) = g(x_{2k-1}) \\ = 2k - 1$$

jika dituliskan kembali menggunakan indeks i, maka diperoleh

$$g(x_i) = 2k - 1 \\ = i$$

dengan $i = 1,\dots,n$ dan i adalah ganjil.

Himpunan titik x_i dengan i genap, dilabeli dengan label $\{2,4,\dots,n-1\}$. Mengingat bahwa indeks i pada himpunan titik x_i adalah genap, indeks i dapat diubah menjadi $2k$ untuk $k = 1,\dots,\frac{n-1}{2}$. Sehingga diperoleh

$$g(x_i) = g(x_{2k}) \\ = n - 2k + 1$$

jika dituliskan kembali menggunakan indeks i, maka diperoleh

$$g(x_i) = n - 2k + 1 \\ = n - i + 1$$

dengan $i = 2,\dots,n-1$ dan i adalah genap.

Himpunan titik y_i dengan i ganjil, dilabeli dengan label $\{n+1, n+3,\dots,2n\}$. Mengingat bahwa indeks i pada himpunan titik y_i adalah ganjil, indeks i dapat diubah menjadi $2k-1$ untuk $k = 1,\dots,n$. Sehingga diperoleh

$$g(y_i) = g(y_{2k-1}) \\ = n + 2k - 1$$

jika dituliskan kembali menggunakan indeks i, maka diperoleh

$$g(y_i) = n + 2k - 1 \\ = n + i$$

dengan $i = 1,3,\dots,n$ dan i adalah ganjil.

Himpunan titik y_i dengan i genap, dilabeli dengan label $\{n+2, n+4,\dots,2n-1\}$. Mengingat bahwa indeks i pada himpunan titik y_i adalah genap, indeks i dapat diubah menjadi $2k$ untuk $k = 1,\dots,n-1$. Sehingga diperoleh

$$g(y_i) = g(y_{2k}) \\ = 2n - 2k + 1$$

jika dituliskan kembali menggunakan indeks i, maka diperoleh

$$g(y_i) = 2n - 2k + 1 \\ = 2n - i + 1$$

dengan $i = 2,\dots,n-1$ dan i adalah genap.

Setelah semua fungsi pelabelan titik didapatkan, maka fungsi pelabelan titik dapat dituliskan sebagai berikut:

$$g(v) = \begin{cases} i; & v = x_i, i \text{ ganjil} \\ n - i + 1; & v = x_i, i \text{ genap} \\ n + i; & v = y_i, i \text{ ganjil} \\ 2n - i + 1; & v = y_i, i \text{ genap} \end{cases}$$

Kedua, dilabeli semua himpunan sisi pada graf tangga L_n dengan n adalah genap. Himpunan sisi pada graf tangga L_n dilabeli dengan label $\{2n+1,\dots,5n-2\}$. Himpunan sisi $x_i y_i$ dengan i ganjil dilabeli dengan label $\left\{2n+1,\dots,\frac{5n}{2}\right\}$. Mengingat bahwa indeks i pada himpunan $x_i y_i$ adalah ganjil, indeks i dapat diubah menjadi $2k-1$ untuk $k = 1,\dots,\frac{n+1}{2}$. Sehingga diperoleh

$$g(x_i y_i) = g(x_{2k-1} y_{2k-1}) \\ = \frac{4n + (2k-1) + 1}{2} \\ = \frac{4n + 2k}{2}$$

jika dituliskan kembali menggunakan indeks i, maka diperoleh

$$g(x_i y_i) = \frac{4n + (2k - 1) + 1}{2}$$
$$= \frac{4n + i + 1}{2}$$

dengan $i = 1,3, \dots, n$ dan i adalah ganjil.

Himpunan sisi $x_i y_i$ dengan i genap dilabeli dengan label $\left\{\frac{5n+3}{2}, \dots, 3n\right\}$. Mengingat bahwa indeks i pada himpunan sisi $x_i y_i$ adalah genap, indeks i dapat diubah menjadi $2k$ untuk $k = 1, \dots, \frac{n-1}{2}$. Sehingga diperoleh

$$g(x_i y_i) = g(x_{2k-1} y_{2k-1})$$
$$= \frac{5n + 2k + 1}{2}$$
$$= \frac{5n + i + 1}{2}$$

dengan $i = 2,4, \dots, n - 1$ dan i adalah genap.

Himpunan sisi $y_i y_{i+1}$ dilabeli dengan label $\{3n + 1, \dots, 4n - 1\}$. Mengingat bahwa terdapat indeks i pada himpunan sisi $y_i y_{i+1}$ berjalan dari $\{1, \dots, n - 1\}$, indeks i dapat diubah menjadi k untuk $k = 1, \dots, n - 1$. Sehingga diperoleh

$$g(y_i y_{i+1}) = g(y_k y_{k+1})$$
$$= 4n - k$$

jika dituliskan kembali menggunakan indeks i, maka diperoleh

$$g(y_i y_{i+1}) = 4n - k$$
$$= 4n - i$$

Himpunan sisi $x_i x_{i+1}$ dilabeli dengan label $\{4n, \dots, 5n - 2\}$. Mengingat bahwa terdapat indeks i pada himpunan sisi $x_i x_{i+1}$ berjalan dari $\{1, \dots, n - 1\}$, indeks i dapat diubah menjadi k untuk $k = 1, \dots, n - 1$. Sehingga diperoleh

$$g(x_i x_{i+1}) = g(x_k x_{k+1})$$
$$= 5n - k - 1$$

jika dituliskan kembali menggunakan indeks i, maka diperoleh

$$g(x_i x_{i+1}) = 5n - k - 1$$
$$= 5n - i - 1$$

Setelah semua fungsi pelabelan sisi didapatkan, maka fungsi pelabelan titik dapat dituliskan sebagai berikut:

$$g(e) = \begin{cases} 5n - i - 1; & e = x_i x_{i+1} \\ 4n - i; & e = y_i y_{i+1} \\ \dfrac{4n + i + 1}{2}; & e = x_i y_i, i \text{ ganjil} \\ \dfrac{5n + i + 1}{2}; & e = x_i y_i, i \text{ genap} \end{cases}$$

Ketiga, dilabeli semua himpunan wilayah pada graf tangga L_n dengan n adalah ganjil. Himpunan wilayah pada graf tangga L_n yaitu r_i, dilabeli dengan label $\{5n - 1, \dots, 6n - 3\}$. Mengingat bahwa terdapat indeks i dapat diubah menjadi k untuk $k = 1, \dots, n - 1$. Sehingga diperoleh

$$g(r_i) = g(r_k) = 5n - 2 + k$$

jika dituliskan kembali menggunakan indeks i, maka diperoleh

$$g(r_i) = 5n - 2 + k$$
$$= 5n - 2 + i$$

Setelah semua fungsi pelabelan wilayah didapatkan, maka fungsi pelabelan wilayah dapat dituliskan sebagai berikut :

$$g(f) = 5n - 2 + i; \quad f = r_i$$

Selanjutnya, ditentukan bobot pelabelan wilayah pada graf tangga L_n dengan n adalah ganjil. Terdapat dua jenis bobot wilayah r_i dengan i ganjil dan bobot wilayah r_i dengan i genap. Pada wilayah r_i ganjil, rumus bobot ditentukan dengan menjumlahkan semua fungsi pelabelan yang berada di wilayah r_i ganjil yaitu :

$$\begin{aligned} w\left(r_{i_{\text{ganjil}}}\right) = g\left(x_{i_{\text{ganjil}}}\right) + g\left(x_{i_{\text{genap}}}\right) \\ + g\left(y_{i_{\text{ganjil}}}\right) + g\left(y_{i_{\text{genap}}}\right) \\ + g\left(r_{i_{\text{ganjil}}}\right) \\ + g\left(x_{i_{\text{ganjil}}} x_{i_{\text{ganjil}+1}}\right) \\ + g\left(y_{i_{\text{ganjil}}} y_{i_{\text{ganjil}+1}}\right) \\ + g\left(x_{i_{\text{ganjil}}} y_{i_{\text{ganjil}}}\right) \\ + g\left(y_{i_{\text{genap}}} y_{i_{\text{genap}}}\right) \end{aligned}$$

$$w\left(r_{i_{\text{ganjil}}}\right) = (i) + (n-i+1) + (n+i) + (2n+1-i) + (5n-2+i) + (5n-i-1) + (4n-i) + \left(\frac{4n+i+1}{2}\right) + \left(\frac{5n+1+i}{2}\right)$$

Pada rumus $w\left(r_{i_{\text{ganjil}}}\right)$, terdapat indeks i ganjil pada fungsi pelabelan titik x_i, y_i, sisi $x_i x_{i+1}$, $y_i y_{i+1}$, $x_i y_i$, dan wilayah r_i. Indeks i ganjil dapat diubah menjadi $(2k-1)$ karena i dimulai dari bilangan 1. Pada rumus $w\left(r_{i_{\text{ganjil}}}\right)$ juga, terdapat indeks i genap pada fungsi pelabelan titik $x_i y_i$, dan sisi $x_i y_i$. Indeks i genap dapat diubah menjadi $2k$ karena i dimulai dari bilangan 2. Oleh karena itu, diperoleh rumus dari bobot wilayah r_i dengan i ganjil adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} w\left(r_{i_{\text{ganjil}}}\right) &= (2k-1) + (n-2k+1) + (n+2k-1) + (2n+1-2k) + (5n-2+(2k-1)) + (5n-(2k-1))-1) \\ &\quad + (4n-(2k-1)) + \left(\frac{4n+2k-1+1}{2}\right) + \left(\frac{5n+1+i}{2}\right) \\ &= \frac{45n-3}{2} \end{aligned}$$

Jadi rumus untuk memperoleh bobot wilayah r_i dengan i ganjil adalah $\frac{45-3}{2}$.

Pada rumus r_i genap, rumus bobot ditentukan dengan menjumlahkan semua fungsi pelabelan yang berada di wilayah r_i genap yaitu:

$$\begin{aligned} w\left(r_{i_{\text{genap}}}\right) &= \left(x_{i_{\text{genap}}}\right) + g\left(x_{i_{\text{ganjil}}}\right) + g\left(y_{i_{\text{genap}}}\right) + g\left(y_{i_{\text{ganjil}}}\right) + g\left(r_{i_{\text{genap}}}\right) + g\left(x_{i_{\text{genap}}} x_{i_{\text{genap}+1}}\right) \\ &\quad + g\left(y_{i_{\text{genap}}} y_{i_{\text{genap}+1}}\right) + g\left(x_{i_{\text{genap}}} y_{i_{\text{genap}}}\right) + g\left(y_{i_{\text{ganjil}}} y_{i_{\text{ganjil}}}\right) \end{aligned}$$

$$w\left(r_{i_{\text{genap}}}\right) = (n-i+1) + (i) + (2n+1-i) + (n+i) + (5n-2+i) + (5n-i-1) + (4n-i) + \left(\frac{5n+1+i}{2}\right) + \left(\frac{4n+1+i}{2}\right)$$

Pada rumus $w\left(r_{i_{\text{genap}}}\right)$, terdapat indeks i ganjil pada fungsi pelabelan titik x_i, y_i, dan sisi $x_i y_i$. Indeks i ganjil dapat diubah menjadi $(2k-1)$ karena i dimulai dari bilangan 3. Pada rumus $w\left(r_{i_{\text{ganjil}}}\right)$ juga, terdapat indeks i genap pada fungsi pelabelan titik x_i, y_i, sisi $x_i x_{i+1}$, $y_i y_{i+1}$, $x_i y_i$, dan wilayah r_i. Indeks i genap dapat diubah menjadi $2k$ karena i dimulai dari bilangan 2. Oleh karena itu, diperoleh rumus dari bobot wilayah $r_i$dengan i genap adalah sebagai berikut:

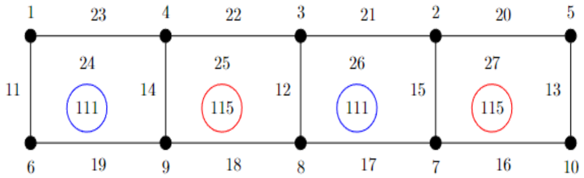
$$\begin{aligned} w\left(r_{i_{\text{genap}}}\right) &= (n-2k+1) + (2k+1) + (2n+1-2k) + \left(n+(2k+1)\right) + (5n-2+2k) + (5n-(2k)-1) \\ &\quad + (4n-2k) + \left(\frac{5n+1+2k}{2}\right) + \left(\frac{4n+(2k+1)+1}{2}\right) \\ &= \frac{45n+5}{2} \end{aligned}$$

Jadi rumus untuk memperoleh bobot wilayah r_i dengan i genap adalah $\frac{45n+5}{2}$.

Setelah rumus bobot wilayah didapatkan, maka rumus bobot wilayah dapat dituliskan sebagai berikut:

$$w(f) = \begin{cases} \frac{45n-3}{2} & f = r_i, i \text{ ganjil} \\ \frac{45n+5}{2} & f = r_i, i \text{ genap} \end{cases}$$

Pada bobot $w(f)$ hanya terdapat 2 jenis bobot wilayah. Sehingga didapatkan bahwa bilangan kromatik pewarnaan lokal wilayah *super antimagic* total pada graf tangga $\chi_{lsatf} = 2$. Hasil pewarnaan lokal wilayah *super antimagic* total pada graf tangga L_n dengan n ganjil dapat dilihat pada Gambar 3.



Gambar 3. Contoh Pewarnaan Lokal Wilayah *Super Antimagic* Total Pada Graf Tangga L_5

Kasus 2. Pada kasus n genap, ditentukan label pada himpunan titik, sisi dan wilayah dari graf tangga L_n. Pertama, dilabeli semua himpunan titik pada graf tangga L_n. Himpunan titik pada graf tangga dilabeli dengan label $\{1, \dots, 2n\}$. Himpunan titik x_i dengan i ganjil, dilabeli dengan label $\{1,3, \dots, n-1\}$. Mengingat bahwa indeks i pada himpunan titik x_i adalah ganjil, indeks i dapat diubah menjadi $2k-1$ untuk $k = 1, \dots, \frac{n}{2}$. Sehingga diperoleh

$$g(x_i) = g(x_{2k-1})$$
$$= 2k - 1$$

jika dituliskan kembali menggunakan indeks i, maka diperoleh

$$g(x_i) = 2k - 1$$
$$= i$$

dengan $i = 1, \dots, n-1$ dan i adalah ganjil.

Himpunan titik x_i dengan i genap, dilabeli dengan label $\{2,4, \dots, n\}$. Mengingat bahwa indeks i pada himpunan titik x_i adalah genap, indeks i dapat diubah menjadi $2k$ untuk $k = 1, \dots, \frac{n}{2}$. Sehingga diperoleh

$$g(x_i) = g(x_{2k})$$
$$= n - 2k + 2$$

jika dituliskan kembali menggunakan indeks i, maka diperoleh

$$g(x_i) = n - 2k + 2$$
$$= n - i + 2$$

dengan $i = 1, \dots, n$ dan i adalah genap.

Himpunan titik y_i dengan i ganjil, dilabeli dengan label $\{n+1, n+3, \dots, 2n-1\}$. Mengingat bahwa indeks i pada himpunan titik y_i adalah ganjil, indeks i dapat diubah menjadi $2k-1$ untuk $k = 1, \dots, n-1$. Sehingga diperoleh

$$g(y_i) = g(y_{2k-1})$$
$$= n + 2k - 1$$

jika dituliskan kembali menggunakan indeks i, maka diperoleh

$$g(y_i) = n + 2k - 1$$
$$= n + i$$

dengan $i = 1,3, \dots, n-1$ dan i adalah ganjil.

Himpunan titik y_i dengan i genap, dilabeli dengan label $\{n+2, n+4, \dots, 2n\}$. Mengingat bahwa indeks i pada himpunan titik y_i adalah genap, indeks i dapat diubah menjadi $2k$ untuk $k = 1, \dots, n$. Sehingga diperoleh

$$g(y_i) = g(y_{2k})$$
$$= 2n + 2 - 2k$$

jika dituliskan kembali menggunakan indeks i, maka diperoleh

$$g(y_i) = 2n + 2 - 2k$$
$$= 2n + 2 - i$$

dengan $i = 2, \dots, n$ dan i adalah genap.

Setelah semua fungsi pelabelan titik didapatkan, maka fungsi pelabelan titik dapat dituliskan sebagai berikut:

$$g(v) = \begin{cases} i; & v = x_i, i \text{ ganjil} \\ n - i + 2; & v = x_i, i \text{ genap} \\ n + i; & v = y_i, i \text{ ganjil} \\ 2n - i + 2; & v = y_i, i \text{ genap} \end{cases}$$

Kedua, dilabeli semua himpunan sisi pada graf tangga L_n dengan n adalah genap. Himpunan sisi pada graf tangga L_n dilabeli dengan label $\{2n+1, \dots, 5n-2\}$. Himpunan $x_i y_i$ dengan i ganjil dilabeli dengan label $\left\{2n+1, \dots, \frac{5n}{2}\right\}$. Mengingat bahwa indeks i pada himpunan sisi $x_i y_i$ adalah ganjil, indeks i dapat diubah menjadi $2k-1$ untuk $k = 1, \dots \frac{n}{2}$. Sehingga diperoleh

$$g(x_i y_i) = g(x_{2k-1} y_{2k-1})$$
$$= \frac{4n + (2k-1) + 1}{2}$$
$$= \frac{4n + 2k}{2}$$

jika dituliskan kembali menggunakan indeks i, maka diperoleh

$$g(x_i y_i) = \frac{4n + 2k}{2}$$
$$= \frac{4n + (2k-1) + 1}{2}$$

$$= \frac{4n+i+1}{2}$$

dengan $i = 1, \dots, n-1$ dan i adalah ganjil.

Himpunan sisi $x_i y_i$ dengan i genap dilabeli dengan label $\left\{\frac{5n+2}{2}, \dots, 3n\right\}$. Mengingat bahwa indeks i pada himpunan soso $x_i y_i$ adalah genap, indeks i dapat diubah menjadi $2k$ untuk $k = 1, \dots, \frac{n}{2}$. Sehingga diperoleh

$$g(x_i y_i) = g(x_{2k} y_{2k})$$
$$= \frac{5n+2k}{2}$$

jika dituliskan kembali menggunakan indeks i, maka diperoleh

$$g(x_i y_i) = \frac{5n+2k}{2}$$
$$= \frac{5n+i}{2}$$

dengan $i = 1, \dots, n-1$ dan i adalah ganjil.

Himpunan sisi $y_i y_{i+1}$ dilabeli dengan label $\{3n+1, \dots, 4n-1\}$. Mengingat bahwa terdapat indeks i pada himpunan sisi $y_i y_{i+1}$ berjalan dari $\{1, \dots, n-1\}$, indeks i dapat diubah menjadi k untuk $k = 1, \dots, n-1$. Sehingga diperoleh

$$g(y_i y_{i+1}) = g(y_k y_{k+1})$$
$$= 4n - k$$

jika dituliskan kembali menggunakan indeks i, maka diperoleh

$$g(y_i y_{i+1}) = 4n - k$$
$$= 4n - i$$

Himpunan sisi $x_i x_{i+1}$ dilabeli dengan label $\{4n, \dots, 5n-2\}$. Mengingat bahwa terdapat indeks i dapat diubah menjadi k untuk $k = 1, \dots, n-1$. Sehingga diperoleh

$$g(x_i x_{i+1}) = g(x_k x_{k+1})$$
$$= 5n - 1 - k$$

jika dituliskan kembali menggunakan indeks i, maka diperoleh

$$g(x_i x_{i+1}) = 5n - 1 - k$$
$$= 5n - 1 - i$$

Setelah semua fungsi pelabelan sisi didapatkan, maka fungsi pelabelan sisi dapat dituliskan sebagai berikut:

$$g(e) = \begin{cases} 5n - i - 1; & e = x_i x_{i+1} \\ 4n - i; & e = y_i y_{i+1} \\ \dfrac{4n+i+1}{2}; & e = x_i y_i, i \text{ ganjil} \\ \dfrac{5n+i+1}{2}; & e = x_i y_i, i \text{ genap} \end{cases}$$

Ketiga, dilabeli semua himpunan wilayah pada graf tangga L_n dengan n adalah genap. Himpunan wilayah pada graf tangga L_n yaitu r_i, dilabeli denganl label $\{5n-1, \dots, 6n-3\}$. Mengingat bahwa terdapat indeks i pada himpunan r_i berjalan dari $\{1, \dots, n-1\}$, indeks i dapat diubah menjadi k untuk $k = 1, \dots, n-1$. Sehingga diperoleh

$$g(r_i) = g(r_k)$$
$$= 5n - 2 + k$$

jika dituliskan kembali menggunakan indeks i, maka diperoleh

$$g(r_i) = 5n - 2 + k$$
$$= 5n - 2 + i$$

Setelah semua fungsi pelabelan wilayah didapatkan, maka fungsi pelabelan wilayah dapat dituliskan sebagai berikut:

$$g(f) = 5n - 2 + i; \quad f = r_i$$

Selanjutnya, ditentukan bobot pelabelan wilayah pada graf tangga L_n dengan n adalah genap. Terdapat dua jenis bobot wilayah r_i dengan i ganjil dan bobot wilayah r_i dengan i genap. Pada wilayah r_i ganjil, rumus bobot ditentukan dengan menjumlahkan semua fungsi pelabelan yang berada di wilayah r_i ganjil yaitu :

$$\begin{aligned} w\left(r_{i_{\text{ganjil}}}\right) = g\left(x_{i_{\text{ganjil}}}\right) + g\left(x_{i_{\text{genap}}}\right) \\ + g\left(y_{i_{\text{ganjil}}}\right) + g\left(y_{i_{\text{genap}}}\right) \\ + g\left(r_{i_{\text{ganjil}}}\right) \\ + g\left(x_{i_{\text{ganjil}}} x_{i_{\text{ganjil}}+1}\right) \\ + g\left(y_{i_{\text{ganjil}}} y_{i_{\text{ganjil}}+1}\right) \\ + g\left(x_{i_{\text{ganjil}}} y_{i_{\text{ganjil}}}\right) \\ + g\left(y_{i_{\text{genap}}} y_{i_{\text{genap}}}\right) \end{aligned}$$

$$w\left(r_{i_{\text{ganjil}}}\right) = (i) + (n-i+2) + (n+i) + (2n+2-i) + (5n-2+i) + (5n-i-1) + (4n-i) + \left(\frac{4n+i+1}{2}\right) + \left(\frac{5n+i}{2}\right)$$

Pada rumus $w\left(r_{i_{\text{ganjil}}}\right)$, terdapat indeks i ganjil pada fungsi pelabelan titik, x_i, y_i, sisi $x_i x_{i+1}$, $y_i y_{i+1}$, $x_i y_i$, dan wilayah r_i. Indeks i ganjil dapat diubah menjadi $(2k-1)$ karena i dimulai dari bilangan 1. Pada rumus $w\left(r_{i_{\text{ganjil}}}\right)$ juga, terdapat indeks i genap pada fungsi pelabelan titik x_i, y_i, dan sisi $x_i y_i$. Indeks i genap dapat diubah menjadi $2k$ karena i dimulai dari bilangan 2. Oleh karena itu, diperoleh rumus dari bobot iwlayah r_i adalah sebagai berikut:

$$w\left(r_{i_{\text{ganjil}}}\right) = (2k-1) + (n-2k+2) + (n+2k-1) + (2n+2-2k) + (5n-2+(2k-1)) + (5n-1-(2k-1)) + \left(4n-(2k-1)\right) + \left(\frac{4n+(2k-1)+1}{2}\right) + \left(\frac{5n+(2k)}{2}\right) = \frac{45n}{2}$$

Jadi rumus untuk memperoleh bobot wilayah r_i dengan i ganjil adalah $\frac{45n}{2}$.

Pada wilayah r_i genap, rumus bobot ditentukan dengan menjumlahkan semua fungsi pelabelan yang berada di wilayah r_i genap yaitu:

$$w\left(r_{i_{\text{genap}}}\right) = \left(x_{i_{\text{genap}}}\right) + g\left(x_{i_{\text{ganjil}}}\right) + g\left(y_{i_{\text{genap}}}\right) + g\left(y_{i_{\text{ganjil}}}\right) + g\left(r_{i_{\text{genap}}}\right) + g\left(x_{i_{\text{genap}}} x_{i_{\text{genap}}+1}\right) + g\left(y_{i_{\text{genap}}} y_{i_{\text{genap}}+1}\right) + g\left(x_{i_{\text{genap}}} y_{i_{\text{genap}}}\right) + g\left(y_{i_{\text{ganjil}}} y_{i_{\text{ganjil}}}\right)$$

$$w\left(r_{i_{\text{genap}}}\right) = (n-i+2) + (i) + (2n+2-i) + (n+i) + (5n-2+i) + (5n-1-(2k)) + (4n-i) + \left(\frac{5n+i}{2}\right) + \left(\frac{4n+1+i}{2}\right)$$

Pada rumus $w\left(r_{i_{\text{genap}}}\right)$, terdapat indeks i ganjil pada fungsi pelabelan titik x_i, y_i, dan sisi $x_i y_i$. Indeks i ganjil dapat diubah menjadi $(2k+1)$ karena i dimulai dari bilangan 3. Pada rumus $w\left(r_{i_{\text{genap}}}\right)$ juga, terdapat indeks i genap pada fungsi pelabelan titik x_i , y_i, sisi $x_i x_{i+1}$, $y_i y_{i+1}$, $x_i y_i$ dan wilayah r_i. Indeks i genap dapat diubah menjadi $2k$ karena i dimulai dari bilangan 2. Oleh karena itu, diperoleh rumus dari bobot wilayah r_i dengan i genap adalah sebagai berikut:

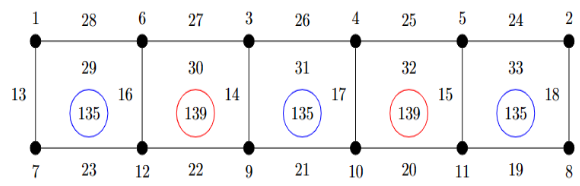
$$w\left(r_{i_{\text{genap}}}\right) = (n-2k+2) + (2k+1) + (2n+2-2k) + \left(n+(2k+1)\right) + (5n-2+2k) + (5n-1-(2k)) + (4n-2k) + \left(\frac{5n+2k}{2}\right) + \left(\frac{4n+1+(2k+1)}{2}\right) = \frac{45n+8}{2}$$

Jadi rumus untuk memperoleh bobot wilayah r_i dengan i genap adalah $\frac{45n+8}{2}$.

Setelah rumus bobot wilayah didapatkan, rumus bobot wilayah dapat dituliskan sebagai berikut:

$$w(f) = \begin{cases} \dfrac{45n}{2}; & f = r_i, i \text{ ganjil} \\ \dfrac{45n+8}{2}; & f = r_i, i \text{ genap} \end{cases}$$

Pada bobot $w(f)$ hanya terdapat 2 jenis bobot wilayah. Sehingga didapatkan bahwa bilangan kromatik pewarnaan lokal wilayah *super antimagic* total pada graf tangga $\chi_{lsatf}(L_n) = 2$. Hasil pewarnaan lokal wilayah *super antimagic* total pada graf tangga L_n dengan n genap dapat dilihat pada Gambar 4.

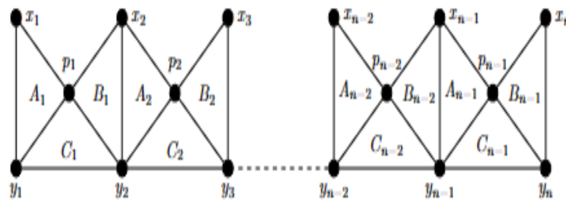


Gambar 4. Contoh Pewarnaan Lokal Wilayah *Super Antimagic* Total Pada Graf Tangga L_6

3.2 Graf Tiga Tangga Melingkar

Definisi 3.2 [16] *Graf tiga tangga melingkar dinotasikan sebagai TCL_n dengan n adalah bilangan bulat positif dan $n \geq 2$, memuat lapisan dari graf cycle C_3.*

Graf tiga tangga melingkar memiliki jumlah titik sebanyak $3n - 1$ titik dan jumlah sisi sebanyak $6n - 5$. Representasi dari graf tiga tangga melingkar dapat dilihat pada Gambar 5.



Gambar 5. Graf Tiga Tangga Melingkar TCL_n

Teorema 2. *Graf tiga tangga melingkar dengan n adalah bilangan asli dan $n \geq 2$ memiliki bilangan kromatik $\chi_{lsatf}(TCL_n) =$ 3.*

Pada bagian ini, graf tiga tangga melingkar TCL_n dikonstruksi dengan menggunakan pewarnaan lokal wilayah *super antimagic* total. Oleh karena itu, ditunjukkan bilangan kromatik pewarnaan lokal wilayah *super antimagic* pada graf tiga tangga melingkar TCL_n.

Bukti. Diberikan graf tiga tangga melingkar TCL_n dengan n adalah bilangan asli dan $n \geq 2$. Menurut definisi graf tiga tangga melingkar TCL_n, himpunan titik pada graf tiga tangga melingkar TCL_n dapat dinotasikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} V(TCL_n) = &\{x_i : 1 \leq i \leq n\} \cup \\ &\{y_i : 1 \leq i \leq n\} \cup \\ &\{p_i : 1 \leq i \leq n-1\} \end{aligned}$$

Berdasarkan penotasian himpunan titik pada graf tiga tangga melingkar TCL_n, maka pasangan himpunan titik yang terhubung disebut sebagai himpunan sisi. Himpunan sisi pada graf tiga tangga melingkar TCL_n dapat dinotasikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} E(TCL_n) = &\{x_i y_i : 1 \leq i \leq n\} \cup \\ &\{x_i p_i : 1 \leq i \leq n-1\} \cup \\ &\{x_{i+1} p_i : 1 \leq i \leq n-1\} \cup \\ &\{y_i p_i : 1 \leq i \leq n-1\} \cup \\ &\{y_{i+1} p_i : 1 \leq i \leq n-1\} \cup \\ &\{y_i y_{i+1} : 1 \leq i \leq n-1\} \end{aligned}$$

Berdasarkan definisi wilayah pada graf, suatu wilayah dalam pada graf dibatasi oleh sub himpunan titik dan sub himpunan sisi dari graf tersebut. Oleh karena itu, dari himpunan titik dan himpunan sisi yang telah diperoleh terbentuk himpunan wilayah pada graf tiga tangga melingkar TCL_nsebagai berikut:

$$\begin{aligned} F(TCL_n) = &\{A_i : 1 \leq i \leq n-1\} \cup \\ &\{B_i : 1 \leq i \leq n-1\} \cup \\ &\{C_i : 1 \leq i \leq n-1\}. \end{aligned}$$

Graf tiga tangga melingkar memiliki kardinalitas titik $|V(TCL_n)| = 3n - 1$, kardinalitas sisi $|E(TCL_n)| = 6n - 5$, dan kardinalitas wilayah $|F(TCL_n)| = 3n - 3$. Didefinisikan fungsi bijektif pelabelan graf tiga tangga melingkar TCL_n yaitu $g\big(V(TCL_n) \cup E(TCL_n) \cup F(TCL_n)\big) \rightarrow \{1,2,\ldots,12-9\}$.

Selanjutnya, ditentukan label pada himpunan titik, sisi, dan wilayah dari graf tiga tangga melingkar TCL_n. Pertama, dilabeli semua himpunan titik pada graf tiga tangga melingkar TCL_n. Himpunan titik pada graf tiga tangga melingkar TCL_n dilabeli dengan label $\{1,\ldots,3n-1\}$. Himpunan titik x_i dilabeli dengan label $\{1,3,\ldots,2n-1\}$. Mengingat bahwa terdapat indeks i pada himpunan titik x_i berjalan dari $\{1,\ldots,n\}$, indeks i dapat diubah menjadi k untuk $k = 1,\ldots,n$. Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} g(x_i) &= g(x_k) \\ &= 2k - 1 \end{aligned}$$

jika dituliskan kembali menggunakan indeks i, maka diperoleh

$$g(x_i) = 2k - 1$$
$$= 2i - 1$$

Himpunan titik p_i dilabeli dengan label $\{2,4,\dots,2n-1\}$. Mengingat bahwa terdapat indeks i pada himpunan p_i berjalan dari $\{1,\dots,n-1\}$, indeks i dapat diubah menjadi $k = 1,\dots,n-1$. Sehingga diperoleh

$$g(p_i) = g(p_k)$$
$$= 2k$$

jika dituliskan kembali menggunakan indeks i, maka diperoleh

$$g(p_i) = 2k$$
$$= 2i$$

Himpunan titik y_i dilabeli dengan label $\{2n.\dots,3n-1\}$. Mengingat bahwa indeks i pada himpunan y_i berjalan dari $\{1,\dots,n\}$, indeks i dapat diubah menjadi k untuk $k = 1,\dots,n$. Sehingga diperoleh

$$g(y_i) = 3n - k$$
$$= 3n - i$$

Setelah semua fungsi pelabelan titik didapatkan, maka fungsi pelabelan titik dapat dituliskan sebagai berikut:

Selanjutnya ditentukan label pada

$$g(v) = \begin{cases} 2i-1; & v = x_i \\ 3n-i; & v = y_i \\ 2i; & v = p_i \end{cases}$$

Kedua, dilabeli semua himpunan sisi pada graf tiga tangga melingkar TCL_n. Himpunan sisi pada graf tiga tangga melingkar TCL_n dilabeli dengan label $\{3n,\dots,9n-6\}$. Himpunan sisi x_iy_i dilabeli dengan label $\{3n,\dots,4n-1\}$. Mengingat bahwa terdapat indeks i pada himpunan sisi x_iy_i berjalan dari $\{1,\dots,n\}$, indeks i dapat diubah menjadi k untuk $k = 1,\dots,n$. Sehingga diperoleh

$$g(x_iy_i) = g(x_ky_k)$$
$$= 4n - k$$

jika dituliskan kembali menggunakan indeks i, maka diperoleh

$$g(x_iy_i) = 4n - k$$
$$= 4n - i$$

Himpunan sisi y_iy_{i+1} dilabeli dengan label $\{4n\dots,5n-2\}$. Mengingat bahwa terdapat indeks i pada himpunan sisi y_iy_{i+1} berjalan dari $\{1,\dots,n-1\}$, indeks i dapat diubah menjadi k untuk $k = 1,\dots,n-1$. Sehingga diperoleh

$$g(y_iy_{i+1}) = g(y_ky_{k+1})$$
$$= 5n - 1 + k$$

jika dituliskan kembali menggunakan indeks i, maka diperoleh

$$g(y_iy_{i+1}) = 5n - 1 + k$$
$$= 5n - 1 + i$$

Himpunan sisi y_ip_i dilabeli dengan label $\{5n-1,\dots,6n-3\}$. Mengingat bahwa terdapat indeks i pada himpunan y_ip_i berjalan dari $\{1,\dots,n-1\}$, indeks i dapat diubah menjadi k untuk $k = 1,\dots,n-1$. Sehingga diperoleh

$$g(y_ip_i) = g(y_kp_k)$$
$$= 5n - 2 + k$$

jika dituliskan kembali menggunakan indeks i, maka diperoleh

$$g(y_ip_i) = 5n - 2 + k$$
$$= 5n - 2 + i$$

Himpunan sisi $y_{i+1}p_i$ dilabeli dengan label $\{6n-2,\dots,7n-4\}$. Mengingat bahwa terdapat indeks i pada himpunan sisi $y_{i+1}p_i$ berjalan dari $\{1,\dots,n-1\}$, indeks i dapat diubah menjadi k untuk $k = 1,\dots,n-1$. Sehingga diperoleh

$$g(y_{i+1}p_i) = g(y_{k+1}p_k)$$
$$= 6n - 3 + k$$

jika dituliskan kembali menggunakan indeks i, maka diperoleh

$$g(y_{i+1}p_i) = 6n - 3 + k$$
$$= 6n - 3 + i$$

Himpunan sisi $x_{i+1}p_i$ dilabeli dengan label $\{7n-3,\dots,8n-5\}$. Mengingat bahwa terdapat indeks i pada himpunan sisi $x_{i+1}p_i$ berjalan dari $\{1,\dots,n-1\}$, indeks i dapat diubah menjadi k untuk $k = 1, \dots, n-1$. Sehingga diperoleh

$$g(x_{i+1}p_i) = g(x_{k+1}p_k)$$
$$= 8n - 4 - k$$

jika dituliskan kembali menggunakan indeks i, maka diperoleh

$$g(x_{i+1}p_i) = 8n - 4 - k$$
$$= 8n - 4 - i$$

Himpunan sisi x_ip_i dilabeli dengan label $\{8n-4, \dots, 9n-6\}$. Mengingat bahwa terdapat indeks i pada himpunan sisi x_ip_i berjalan dari $\{1, \dots, n-1\}$, indeks i dapat diubah menjadi k untuk $k = 1, \dots, n-1$. Sehingga diperoleh

$$g(x_ip_i) = g(x_kp_k)$$
$$= 9n - 5 - k$$

jika dituliskan kembali menggunakan indeks i, maka diperoleh

$$g(x_ip_i) = 9n - 5 - k$$
$$= 9n - 5 - i$$

Setelah semua fungsi pelabelan sisi dapat dituliskan sebagai berikut

$$g(e) = \begin{cases} 4n - i; & e = x_iy_i \\ 9n - 5 - i; & e = y_ip_i \\ 8n - 4 - i & e = x_{i+1}p_i \\ 5n - 2 + i; & e = y_ip_i \\ 6n - 3 + i & e = y_{i+1}p_i \\ 5n - 1 - i & e = y_iy_{i+1} \end{cases}$$

Ketiga, dilabeli semua himpunan wilayah pada graf tiga tangga melingkar TCL_n. Himpunan wilayah pada graf tiga tangga melingkar TCL_n dilabeli dengan label $\{9n-5, \dots, 12n-9\}$. Himpunan wilayah A_i dilabeli dengan label $\{1, \dots, n-1\}$, indeks i dapat diubah menjadi k untuk $k = 1, \dots, n-1$. Sehingga diperoleh

$$g(A_i) = g(A_k)$$
$$= 11n - 6 - 2k$$

jika dituliskan kembali menggunakan indeks i, maka diperoleh

$$g(A_i) = 11n - 6 - 2k$$
$$= 11n - 6 - 2i$$

Himpunan wilayah B_i dilabeli dengan label $\{9n-5, 9n-3, \dots, 11n-9\}$. Mengingat bahwa terdapat indeks i pada himpunan wilayah B_i berjalan dari $\{1, \dots, n-1\}$, indeks i dapat diubah menjadi k untuk $k = 1, \dots, n-1$. Sehingga diperoleh

$$g(B_i) = g(B_k)$$
$$= 11n - 7 - 2k$$

jika dituliskan kembali menggunakan indeks i, maka diperoleh

$$g(B_i) = 11n - 7 - 2k$$
$$= 11n - 7 - 2i$$

Himpunan wilayah C_i dilabeli dengan label $\{11n-7, \dots, 12n-9\}$. Mengingat bahwa terdapat indeks i pada himpunan wilayah C_i berjalan dari $\{1, \dots, n-1\}$. Sehingga diperoleh

$$g(C_i) = g(C_k)$$
$$= 12n - 8 - k$$

jika dituliskan kembali menggunakan indeks i, maka diperoleh

$$g(C_i) = 12n - 8 - k$$
$$= 12n - 8 - i$$

Setelah semua fungsi pelabelan wilayah didapatkan, maka fungsi pelabealn wilayah dapat dituliskan sebagai berikut:

$$g(f) = \begin{cases} 11n - 6 - 2i; & f = A_i \\ 11n - 7 - 2i; & f = B_i \\ 12n - 8 - i; & f = C_i \end{cases}$$

Selanjutnya, ditentukan bobot pelabelan wilayah pada graf tiga tangga melingkar TCL_n. Terdapat tiga jenis wilayah yang ditentukan bobotnya yaitu wilayah A_i, B_i, C_i. Pada wilayah A_i, rumus bobot ditentukan dengan menjumlahkan semua fungsi pelabelan yang berada di wilayah A_i yaitu:

$$w(A_i) = g(x_i) + g(p_i) + g(y_i) + g(x_ip_i)$$
$$+ g(x_iy_i) + g(y_ip_i) + g(A_i)$$
$$= (2i - 1) + (2i) + (3n - i) + (9n$$
$$- 5 - i) + (4n - i) + (5n - 2 +$$
$$i) + (11n - 6 - 2i)$$
$$= 32n - 14$$

Jadi rumus untuk memperoleh bobot wilayah A_i adalah $32n - 14$.

Pada wilayah B_i, rumus bobot ditentukan dengan menjumlahkan semua fungsi pelabelan yang berada di wilayah B_i yaitu:

$$\begin{aligned}
w(B_i) &= g(x_{i+1}) + g(y_{i+1}) + g(p_i) + \\
&\quad g(x_{i+1}p_i) + g(y_{i+1}p_i) + \\
&\quad g(x_{i+1}y_{i+1}) + g(B_i) \\
&= (2(i+1)-1) + \big(3n-(i+1)\big) + \\
&\quad (2i) + (8n-4-i) + (6n-3+i) \\
&\quad + \big(4n-(i+1)\big) + (11n-7-2i) \\
&= 32n - 15
\end{aligned}$$

Jadi rumus untuk memperoleh bobot wilayah B_i adalah $32n - 15$.

Pada wilayah C_i, rumus bobot ditentukan dengan menjumlahkan semua fungsi pelabelan yang berada di wilayah C_i yaitu:

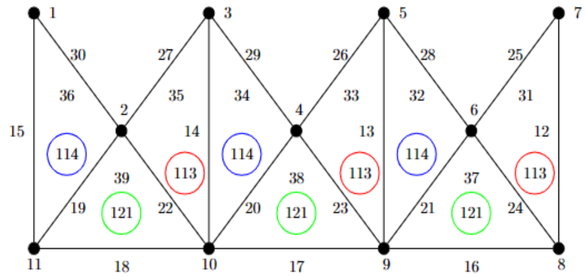
$$\begin{aligned}
w(C_i) &= g(y_i) + g(y_{i+1}) + g(p_i) + \\
&\quad g(y_i y_{i+1}) + g(y_i p_i) + g(y_{i+1}p_i) \\
&\quad + g(C_i) \\
&= (3n-i) + \big(3n-(i+1)\big) + (2i) \\
&\quad + (5n-1-i) + (5n-2+i) + \\
&\quad (6n-3+i) + (12n-8-i) \\
&= 34n - 15
\end{aligned}$$

Jadi rumus untuk memperoleh bobot wilayah B_i adalah $34n - 15$.

Setelah rumus bobot wilayah didapatkan, maka rumus bobot wilayah dapat dituliskan sebagai berikut:

$$w(f) = \begin{cases} \dfrac{64n-28}{2}; & f = A_i \\ \dfrac{64n-30}{2}; & f = B_i \\ \dfrac{68n-30}{2}; & f = C_i \end{cases}$$

Pada bobot $w(f)$ hanya terdapat 3 jenis bobot wilayah. Sehingga didapatkan bahwa bilangan kromatik pewarnaan lokal wilayah *super antimagic* total pada graf tiga tangga melingkar $\chi_{lsatf}(TCL_n) = 3$. Hasil pewarnaan lokal wilayah *super antimagic* total pada graf tiga tangga melingkar TCL_n dengan *n* genap dapat dilihat pada Gambar 6.



Gambar 6. Contoh Pewarnaan Lokal Wilayah *Super Antimagic* Total Pada Graf Tiga Tangga Melingkar TCL_4

4. Penutup

Pada penelitian ini, dapat disimpulkan bahwa Graf tangga L_n memiliki bilangan kromatik pewarnaan lokal wilayah *super antimagic* total $\chi_{lsatf}(L_n) = 2$. Graf tiga tangga melingkar TCL_n memiliki bilangan kromatik pewarnaan lokal wilayah *super antimagic* total $\chi_{lsatf}(L_n) = 3$.

Ucapan Terima Kasih

Penulis mengucapkan terima kasih atas dukungan untuk penelitian ini dengan Skim Pembiayaan Penelitian dan Pengabdian kepada Masyarakat PNBP Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Mulawarman berdasarkan Surat No. 1410/UN17.7/PP/2023.

Referensi

[1] C. Vandusev, "Graph Theory with Applications," 2006.

[2] J. A. Gallian, "A dynamic survey of graph labeling," *Electron J Comb*, pp. 1–219, 2009, doi: 10.37236/11668.

[3] Hartsfield N. dan Ringel G., "Pearls in Graph Theory a Comprehensive Introduction.," 1994.

[4] Munir, R. "Matematika Diskrit," 2010.

[5] S. Arumugam, K. Premalatha, M. Bača, and A. Semaničová-Feňovčíková, "Local Antimagic Vertex Coloring of a Graph," *Graphs Comb*, vol. 33, no. 2, pp. 275–285, Mar. 2017, doi: 10.1007/s00373-017-1758-7.

[6] S. J. Wijaya and Mulyono, "Pelabelan Total Titik Ajaib pada Graf Petersen Yang Diperumum," 2015.

[7] D. Setyawan, A. N. Afni, R. M. Prihandini, E. R. Albirri, and A. I. Kristiana, "Pewarnaan Titik Total

Super Anti-Ajaib Lokal Pada Graf Petersen Diperumum $P(n,k)$ dengan $k = 1,2$," *BAREKENG: Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan*, vol. 15, no. 4, pp. 651–658, Dec. 2021, doi: 10.30598/barekengvol15iss4pp651-658.

[8] Y. Nur Azizah and C.-U. Jember, "Penerapan Pewarnaan Titik untuk *Super* (a, d) − H−Antimagic Total Covering pada Gabungan Graf Khusus."

[9] I. H. Agustin, M. Hasan, Dafik, R. Alfarisi, and R. M. Prihandini, "Local edge antimagic coloring of graphs," *Far East Journal of Mathematical Sciences*, vol. 102, no. 9, pp. 1925–1941, Nov. 2017, doi: 10.17654/MS102091925.

[10] K. Al Azizu, "PELABELAN TOTAL SISI AJAIB *SUPER* PADA GRAF PRISMA BERCABANG (C 5 × P 2) K 2."

[11] Putri, D. F., Dafik, I. H. Agustin, R. Alfarisi, "On the local vertex antimagic total coloring of some families tree," in *Journal of Physics: Conference Series*, IOP Publishing Ltd, Apr. 2018. doi: 10.1088/1742-6596/1008/1/012035.

[12] D. W. Eka M, "Pelabelan Total *Super* (a, d)-sisi Antimagic pada Gabungan Saling Lepas Graf Bintang dengan Teknik Pewarnaan Titik."

[13] R. Nisviasari, Dafik, I. H. Agustin, R. M. Prihandini, and I. N. Maylisa, "Local *super* anti-magic total face coloring on shackle graphs," in *Journal of Physics: Conference Series*, IOP Publishing Ltd, Mar. 2021. doi: 10.1088/1742-6596/1836/1/012022.

[14] Anggraeni, Dafik, T. K. Maryati, I. H. Agustin, R. Alfarisi, and E. Y. Kurniawati, "On local *super* antimagic face coloring of plane graphs," in *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*, Institute of Physics Publishing, Apr. 2019. doi: 10.1088/1755-1315/243/1/012016.

[15] A. Royani, M. Kiftiah, and Y. Intisari, "EKSENTRISITAS DIGRAF PADA GRAF TANGGA," 2017.

[16] D M O Suni, "On total H-irregularity strength of diamond ladder, three circular ladder, and prism graphs," 2020.