Available online : https://doi.org/10.32665/james.v7i1.1932

Journal of Mathematics Education and Science



p-ISSN: 2621-1203 VOL. 7 NO. 1 (2024) : 53-57 e-ISSN: 2621-1211

# PELABELAN TOTAL SISI AJAIB PADA GRAF *TRIANGULAR BOOK* $Bt_n$

**Rico Dwi Cahyono[1], Qonita Qurrota A'yun[2], Wasono[3], Hardina Sandariria[4]**

**Corresponding author: Qonita Qurrota A'yun**
[1]Universitas Mulawarman, koro.kun17@gmail.com
[2]Universitas Mulawarman, qonitaqurrota@fmipa.unmul.ac.id
[3]Universitas Mulawarman, wason.khayla32@gmail.com
[4]Universitas Mulawarman, hardinasandariria@fmipa.unmul.ac.id
Received : 25 Juli 2023, Revised : 8 April 2024, Accepted : 8 April 2024

## Abstract

Graphs labeling is the assignment of labels to graphs elements such a node, edge, and regions. Suppose $G = (V(G), E(G))$ is a simple graph where $V(G)$ is a non-empty set of vertice(s) and $E(G)$ is a set of edge(s). A bijective function $f: V(G) \cup E(G) \to \{1, 2, 3, \dots, |V(G)| + |E(G)|\}$ is called a magic total labeling if $f$ satisfies $f(x) + f(y) + f(xy) = k$ for every $xy \in E(G)$ with $k$ as a constant. This research will discuss the total magic labeling on triangular book graph $Bt_n$. The result shows that if $Bt_n$ has $|E(Bt_n)| = 2n + 1$ edges and $|V(Bt_n)| = n + 2$, then we get edge magic constant $k = 3n + 6$, then $k$ will be odd when $n$ odd and $k$ will be even when $n$ is even.

*Keywords: Edge total labeling, Graph labeling, Triangular book graph*

## Abstrak

Pelabelan pada graf merupakan pemberian label pada elemen – elemen graf seperti titik, sisi, dan wilayah. Misalkan $G = (V(G), E(G))$ adalah graf sederhana dengan $V(G)$ himpunan titik yang tidak kosong dan $E(G)$ himpunan sisi. Pelabelan total sisi ajaib adalah suatu fungsi bijektif $f: V(G) \cup E(G) \to \{1, 2, 3, \dots, |V(G)| + |E(G)|\}$, sehingga $f(x) + f(y) + f(xy) = k$ untuk setiap $xy \in E(G)$ dengan $k$ sebagai konstanta. Penelitian ini akan membahas pelabelan total sisi ajaib pada graf *triangular book* $Bt_n$. Berdasarkan hasil penelitian, diperoleh jika $Bt_n$ memiliki banyak sisi $|E(Bt_n)| = 2n + 1$ dan banyak titik $|V(Bt_n)| = n + 2$, maka diperoleh konstanta sisi ajaib $k = 3n + 6$, untuk $n$ adalah bilangan natural, maka $k$ akan bernilai ganjil jika $n$ ganjil dan $k$ akan genap ketika $n$ genap.

*Kata Kunci: Pelabelan graf, Total sisi ajaib, Graf Buku Segitiga*

## 1. Pendahuluan

Teori graf dikenal sebagai salah satu bidang ilmu di Matematika yang memiliki perkembangan sangat pesat. Hal ini dikarenakan penerapan graf memiliki banyak manfaat dalam menyelesaikan permasalahan yang muncul di kehidupan sehari–hari. Beberapa contoh masalah yang diselesaikan menggunakan teori graf adalah masalah penjadwalan dengan pewarnaan titik, menentukan rute tercepat, jaringan komunikasi, dan pengambaran struktur organisasi[1]. Leonhard Euler memperkenalkan teori graf pertama kali pada tahun 1736 ketika ingin menunjukkan pembuktian bahwa empat daerah di Kalinigrad Rusia yang dihubungkan oleh tujuh jembatan Konigsberg kesemuanya memungkinkan untuk dilewati oleh seseorang [2].

Pelabelan graf adalah salah satu cabang teori graf dengan perkembangan yang cepat. Terdapat banyak implementasi pelabelan graf di berbagai bidang keilmuan. Sejarah pelabelan graf pada awalnya adalah dipelopori oleh Sedleck di tahun 1963. Sedleck mendapatkan inspirasi dari bujur sangkar ajaib, yang kemudian mencetuskan konsep pelabelan ajaib [3]. Pelabelan graf pada dasarnya adalah suatu pemetaan bijektif dengan memberikan label pada objek–objek graf dengan menggunakan bilangan natural. Berdasarkan objek–objek graf maka pelabelan dikategorikan menjadi tiga, yaitu pelabelan titik, pelabelan sisi, dan pelabelan total [4]. Sesuai dengan penamaan, suatu pelabelan yang dilakukan dengan menggunakan objek himpunan titik disebut dengan pelabelan titik. Adapun jika menggunakan objek himpunan sisi maka disebut pelabelan sisi. Sedangkan pelabelan menggunakan objek himpunan berupa titik dan sisi sekaligus dinamakan sebagai pelabelan total [5].

Pelabelan total sisi ajaib pada graf $G$ secara matematis didefinisikan sebagai suatu pemetaan $f$ bijektif dari $V(G) \cup E(G)$ ke himpunan bilangan natural $\{1, 2, 3, \ldots, p + r\}$ dimana $p = |V(G)|$, banyaknya titik $n + 2$ dan $r = |E(G)|$, banyaknya sisi $2n + 1$ sedemikian sehingga untuk setiap sisi $xy \in E(G)$ dengan $x, y \in V(G)$ haruslah memenuhi

$$f(x) + f(xy) + f(y) = k,$$

untuk $k$ dinamakan suatu konstanta ajaib dari $G$ [6].

Graf buku segitiga (*triangular book graph*) dinotasikan dengan $Bt_n$ adalah graf yang setiap titiknya terhubung. Graf $Bt_n$ memiliki banyak sisi $2n + 1$ dan banyak titik $n + 2$

**Definisi 1.** *Graf buku segitiga (triangular book graph) adalah suatu graf terhubung yang memiliki himpunan titik* $V(Bt_n) = \{x_i, 1 \leq i \leq 2\} \cup \{y_j, 1 \leq j \leq n\}$ *dan himpunan sisi* $E(Bt_n) = \{x_1x_2\} \cup \{x_iy_j;\ i = 1, 2,\ 1 \leq j \leq n\}$[7].

Pelabelan sisi ajaib telah banyak diteliti oleh peneliti sebelumnya seperti [8]–[11]. Riskawati dkk telah melakukan penelitian tentang graf *triangular book* yang berjudul nilai ketidakteraturan pada graf buku segitiga [12]. Rathond dkk juga telah melakukan penelitian terkait graf buku segitiga (*triangular book graph*) [13], [14]–[16].

Berdasarkan uraian sebelumnya, peneliti tertarik untuk melakukan penelitian mengenai pelabelan total ajaib, khususnya pelabelan total sisi ajaib. Pelabelan total sisi ajaib merupakan pelabelan dengan fungsi bijektif yang himpunan titik dan sisinya dipetakan dari angka 1 sampai semua himpunan titik dan sisi tersebut terisi dengan syarat bobot sisi tidak boleh ada yang sama satu sama lainnya. Pada penelitian ini, pelabelan dimulai dari himpunan titik, kemudian diperiksa bobot sisi, Ketika bobot sisi tidak bernilai sama satu sama lain, maka dilakukan pelabelan pada himpunan sisi, dan menghitung konstanta ajaibnya pada setiap sisi. Graf yang digunakan adalah graf *triangular book*, graf *triangular book* dipilih dalam penelitian dikarena graf buku segitiga saat dilakukan pelabelan titik tidak terdapat bobot sisi yang sama satu sama lainnya. Oleh karena itu peneliti memilih judul "Pelabelan Total Sisi Ajaib pada Graf *triangular book*"

## 2. Metode


**Gambar 1. Tahapan Penelitian**

Pada penelitian ini, metode yang digunakan adalah dengan mempelajari studi literatur berupa buku atau makalah yang berkaitan dengan topik penelitian berupa pelabelan graf. Setelah itu, hasil mempelajari studi literatur tersebut digunakan sebagai landasan teori untuk mengembangkan teori pelabelan khususnya dari *triangular book graph* yang dinyatakan dalam bentuk teorema.

Pada bagian ini, membahas mengenai hasil penelitian dari pelabelan total sisi ajaib dari graf Triangular Book yang dinyatakan dalam bentuk teorema serta pembuktiannya. Tahapan penelitian disajikan pada Gambar 1.

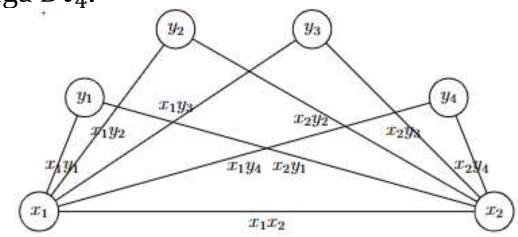
## 3. Hasil dan Pembahasan

Definisi dari graf buku segitiga, atau dalam Bahasa Inggris disebut *triangular book*, diberikan secara formal sebagai berikut.

Suatu graf *triangular book* dinotasikan dengan $Bt_n$ untuk $n \geq 2$ suatu bilangan asli, dan memiliki banyak sisi $2n+1$ dan banyak titik $n+2$. Sisi-sisi dan titik-titik pada graf $Bt_n$ diberi notasi sesuai dengan Definisi 1.

Sebagai ilustrasi, misal diberikan graf $Bt_4$ yang memiliki titik sebanyak $4+2=6$. Dua buah titik dengan derajat terbesar diberi notasi $x_1$ dan $x_2$. Adapun titik-titik lainnya yang memiliki derajat dua diberi label $y_1, y_2, y_3, y_4$. Setelah pemberian notasi pada titik, maka diperoleh notasi pada sisi-sisi dengan $x_1$ sebagai titik ujung adalah $x_1y_j$ dengan $j = 1,2,3,4$. Secara sama, diperoleh notasi pada sisi-sisi dengan $x_2$ sebagai titik ujung adalah $x_2y_j$ dengan $j = 1,2,3,4$.

Gambar 1 menyajikan ilustrasi pemberian notasi pada titik dan sisi graf buku segitiga $Bt_4$.




**Gambar 2. Notasi pada titik dan sisi Graf $Bt_4$**

Selanjutnya, graf *triangular book* akan dikontruksikan dengan menggunakan pelabelan total sisi ajaib. Teorema berikut berperan untuk menunjukkan nilai konstanta ajaib dari suatu graf buku segitiga yang diperoleh dari pelabelan total sisi ajaib.

**Teorema 1.** *Terdapat graf triangular book $Bt_n$ dengan $n > 2$, maka $Bt_n$ memiliki konstanta ajaib $k = 3n + 6$ untuk pelabelan total sisi ajaib.*

**Bukti:** Graf *triangular book* $Bt_n$ adalah suatu graf yang setiap titiknya terhubung oleh suatu garis. Himpunan titik di graf $Bt_n$ adalah $V(Bt_n) = \{x_i,\ 1 \leq i \leq 2\} \cup \{y_j,\ 1 \leq j \leq n\}$ dan himpunan sisinya adalah $E(Bt_n) = \{x_iy_j,\ 1 \leq i \leq 2,\ 1 \leq j \leq n\}$. Mula-mula diperhatikan bahwa $Bt_n$ memiliki $n+2$ titik sehingga titik-titik tersebut akan diberi label berupa bilangan natural bernilai $1, \dots, n+2$. Titik-titik pada himpunan $\{x_i,\ 1 \leq i \leq 2\}$ diberi label bilangan terkecil yaitu 1 dan label bilangan terbesar yaitu $n+2$. Dengan kata lain, $x_1$ dilabeli dengan 1 dan $x_2$ dilabeli dengan $n+2$. Selanjutnya, titik-titik pada himpunan $\{y_j,\ 1 \leq j \leq n\}$ diberi label berupa bilangan yang berada di antara 1 dan $n+2$ secara berurutan. Dengan kata lain, $y_j$ diberi label $j+1$ untuk setiap $1 \leq j \leq n$. Berdasarkan skema ini, berarti seluruh titik di graf $Bt_n$ telah dilabeli.

Berikutnya diperhatikan bahwa $Bt_n$ memiliki sisi sebanyak $2n+1$. Perhatikan bahwa titik $x_1$ memiliki label bilangan terkecil, dan $x_1$ bertetangga dengan $y_1$ yang memiliki label bilangan terkecil berikutnya. Berarti untuk mendapatkan hasil jumlahan ajaib, maka label yang diberikan pada sisi $x_1y_1$ haruslah label bilangan terbesar, yaitu diperoleh

$$\begin{aligned} |V(Bt_n)| + |E(Bt_n)| &= (2n+1) + (n+2) \\ &= 3n + 3. \end{aligned}$$

Dengan demikian, sisi $x_1y_2$ akan diberi label berupa bilangan natural $3n+2$. Sisi $x_1y_3$ akan diberi label berupa bilangan natural $3n+1$, dan begitu pula seterusnya. Diperoleh bahwa sisi $x_1y_j$ diberi label berupa $3n+4-j$, untuk $1 \leq j \leq n$.

Selanjutnya diperhatikan bahwa titik $x_1$ bertetangga dengan titik $x_2$ yang memiliki label $n+2$. Karena $x_1$ dan $x_2$ bertetangga dengan setiap titik $y_j$ untuk $j = 1, \dots, n$ dan banyaknya titik $y_j$ adalah $n$, berarti untuk mendapatkan hasil jumlahan ajaib maka sisi

$x_1x_2$ diberi label berupa $|V(Bt_n)| + |E(Bt_n)| - n$. Dengan mengingat bahwa $|V(Bt_n)| = 2n + 1$ dan $|E(Bt_n)| = n + 2$, maka diperoleh hasil $2n + 3$. Dengan demikian, sisi $x_2y_1$ akan diberi label berupa bilangan natural $2n + 2$. Sisi $x_2y_2$ akan diberi label berupa bilangan natural $2n + 1$, dan begitu pula seterusnya. Diperoleh bahwa sisi $x_2y_j$ diberi label berupa $2n + 3 - j$, untuk $1 \leq j \leq n$.

Berdasarkan hasil di atas, dapat dikonstruksi pemetaan bijektif $f: V(Bt_n) \cup E(Bt_n) \rightarrow \{1,2, \dots, |V(Bt_n)| + |E(Bt_n)|\}$ untuk graf buku segitiga yang memiliki titik sebanyak $n + 2$ dan memiliki sisi sebanyak $2n + 1$ dengan fungsi pelabelan sebagai berikut.

Fungsi pelabelan titik graf buku segitiga

$$f(v) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } v = x_1 \\ n+2, & \text{untuk } v = x_2 \\ j+1, & \text{untuk } v = y_j, 1 \leq j \leq n \end{cases}$$

Fungsi pelabelan sisi graf buku segitiga

$$f(e) = \begin{cases} 2n+3, & \text{untuk } e = x_1x_2 \\ 3n+4-j, & \text{untuk } e = x_1y_j, 1 \leq j \leq n \\ 2n+3-j, & \text{untuk } e = x_2y_j, 1 \leq j \leq n \end{cases}$$

Menggunakan fungsi pelabelan di atas, diperoleh konstanta ajaib untuk pelabelan total sisi ajaib adalah

$$\begin{aligned} k &= f(x_1) + f(x_2) + f(x_1x_2) \\ &= 1 + (n+2) + (2n+3) \\ &= 3n + 6 \end{aligned}$$

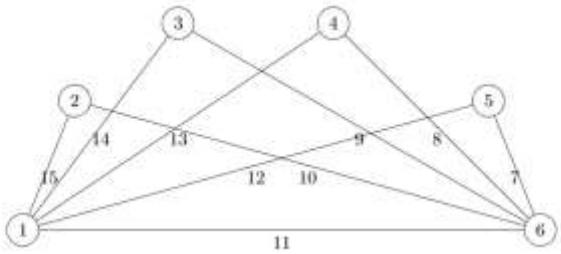
yang juga berlaku untuk setiap $x_i$, $y_j$, $x_iy_j$ dengan $1 \leq i \leq 2$ dan $1 \leq j \leq n$.

■

Selanjutnya diberikan contoh penerapan Teorema 1. untuk membuktikan pelabelan total sisi ajaib pada graf $Bt_n$ dengan $n$ genap. Diperoleh bahwa graf *triangular book* $Bt_4$ memiliki nilai konstanta ajaib genap

$$k = 3(4) + 6 = 18.$$

Adapun ilustrasi pelabelan total sisi ajaib untuk graf *triangular book* $Bt_4$ disajikan pada Gambar 3.

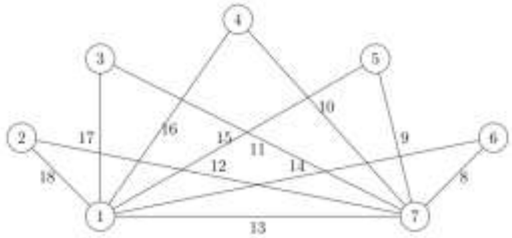


**Gambar 3. Pelabelan total sisi ajaib graf *triangular book* $Bt_4$**

Selanjutnya, dibuktikan pelabelan total sisi ajaib pada graf $Bt_n$ dengan $n$ ganjil. Diperoleh bahwa graf *triangular book* $Bt_5$ memiliki nilai konstanta Ajaib yang benilai ganjil

$$k = 3(5) + 6 = 21.$$

Adapun ilustrasi pelabelan total sisi untuk graf *triangular book* $Bt_5$ disajikan pada Gambar 4.



**Gambar 4. Pelabelan total sisi ajaib graf *triangular book* $Bt_5$**

## 4. Penutup

Berdasarkan hasil penelitian, telah dibuktikan bahwa terdapat pelabelan total sisi ajaib pada graf *triangular book* $(Bt_n)$ dengan konstanta ajaib $k = 3n + 6$. Untuk $n$ bilangan genap $Bt_4$ yang memiliki nilai konstanta ajaib yang bernilai genap yaitu 18 dan untuk $n$ bernilai ganjil $Bt_5$ memiliki nilai konstanta ajaib yang bernilai ganjil yaitu 21.

## Referensi


[1] Febrianti. F, Yulianti. L, and Narwen, "Dimensi Metrik Pada Graf Amalgamasi Tangga Segitiga Diperumum Homogen," *Jurnal Matematika UNAND*, vol. 8, pp. 84–90, May 2019.

[2] Tikasari. A and Rahadjeng. B, "Pelabelan Sisi Ajaib Dan Sisi Ajaib Super Pada Graf Kipas, Graf Tangga, Graf Prisma, Graf Lintasan, Graf Sikel, Dan Graf Buku," *Matematika*, pp. 1–5, 2013.

[3] F. Firmansah and M. R. Yuwono, "Pelabelan Harmonis Ganjil pada Kelas Graf Baru Hasil Operasi Cartesian Product," *Jurnal Matematika "MANTIK,"* vol. 3, no. 2, pp. 87–95, Oct. 2017, doi: 10.15642/mantik.2017.3.2.87-95.

[4] A. Yunadi and S. Sy, "Pelabelan Total Sisi-Ajaib Super Pada Graf Korona C n K m," 2020.

[5] Surya. S. H. G and Mulyono, “Pelabelan Total Sisi Ajaib Pada Graf Cycle,” *Karismatika*, vol. 5, pp. 33–39, 2019.

[6] W. D. Wallis, E. T. Baskoro, and M. Miller, “Edge-magic total labelings.”

[7] F. R. Eka and L. Sya, “Super Antimagicness of Triangular Book and Diamon Ladder Graphs.”

[8] N. N. A. Andayani and I. G. N. Pujawan, “Pelabelan Total Sisi Ajaib Super pada Graf T(2,n,n+6),” *Mandalika Mathematics and Education Journal*, vol. 4, p. 46, 2022, doi: 10.29303/jm.v4i1.1763.

[9] M. A. Muttaqien and A. Suyitno, “UJM 2 (2) (2013),” 2012, [Online]. Available: http://journal.unnes.ac.id/sju/index.php/ujm

[10] S. Surya *et al.*, “Pelabelan Total Sisi Ajaib Pada Graf Cycle.”

[11] Gallian. J. A, “A Dynamic Survey of Graph Labeling,” pp. 125–181, 2019.

[12] Riskawati, k Ekawati, and Kasmirah, “Nilai Ketidakteraturan Pada Graf Buku Segitiga,” *Axiomath*, vol. 2, pp. 1–4, May 2020.

[13] N. B. Rathod and K. K. Kanani, “k-cordial Labeling of Triangular Book, Triangular Book with Book Mark & Jewel Graph,” 2017. [Online]. Available: http://www.ripublication.com/gjpam.htm

[14] An. Murugan and Rm. Irudhaya Aspin Chitra, “Lucky Edge Labeling of Triangular Graphs,” *International Journal of Mathematics Trends and Technology*, vol. 36, no. 2, 2016, [Online]. Available: http://www.ijmttjournal.org

[15] A. Sharmia and S. Lavanya, “The Minimum Edge Dominating Energy of a Triangular Book and A Globe Graph,” 2021.

[16] M. I. Tiluky, A. N. M. Salman, and E. R. Persulessy, “On the Total Irregularity Strength of Fan, Wheel, Triangular Book, and Friendship Graphs,” *Procedia Comput Sci*, vol. 74, pp. 124–131, 2015, doi: 10.1016/j.procs.2015.12.087.