Available online : https://doi.org/10.32665/james.v5i2.557

Journal of Mathematics Education and Science

p-ISSN: 2621-1203 VOL. 5 NO. 2 (2022) : 137-145 e-ISSN: 2621-1211

PENERAPAN TEORI BILANGAN DOMINASI JARAK DUA PADA PEMILIHAN LOKASI PANGKAL OJEK ONLINE

Reni Umilasari[1], Ilham Saifudin[2], Afkar Ayyasy[3]

Corresponding author : Reni Umilasari
[1]Universitas Muhammadiyah Jember, reni.umilasari@unmuhjember.ac.id
[2]Universitas Muhammadiyah Jember, ilham.saifudin@unmuhjember.ac.id
[3]Universitas Muhammadiyah Jember, afkarayyasy@gmail.com
Received : 9 Agustus 2022, Revised : 1 Oktober 2022, Accepted : 7 Oktober 2022

Abstract

Let G be a connected graph and S_2 is a dominating set of distance two of G. S_2 is defined as a subset of $V(G)$ such that the vertices of G which are not connected to S_2 have a maximum distance 2 towards S_2. The minimum cardinality of S_2 is denoted by $\gamma_2(G)$ and called a dominating number. In this paper, we determined the dominating number of distance two of vertex and edge *shackle* product of the complete bipartite graph and the complete tripartite graph, they are *Shack* $(K_{m,n}, v, k)$ $m \geq 2, n \geq 3$, *Shack* $(K_{m,n}, e, k)$ $m \geq 2, n \geq 3$, *Shack* $(K_{m,n,r}, v, k)$ $m, n, r \geq 2$, and *Shack* $(K_{m,n,r}, e, k)$ $m, n, r \geq 2$. The implementation of this concept is used to determine the minimum number of ojek station in 3 sub-districts of Jember Regency. Sumbersari, Patrang and Kaliwates are represented into $(Sb - Graf)$, $(Pt - Graf)$ and $(Kl - Graf)$ graphs respectively with the rule that stalls, crossroads, and mosques are represented as vertices and the distance between these locations is described as edges. The final result of this study obtained a minimum number of ojek station, namely 8 posts (Sumbersari), 7 (Patrang), and 5 (Kaliwates) from 169 vertices spread across the three sub-districts. From those amount, it was implemented using the ARCGIS application based on GIS (Geographic Information System) of the three sub-districts.

Keywords: dominating number, dominating set, ojek, shackle, bipartite, tripartite

Abstrak

Misalkan G adalah graf terhubung dan S_2 merupakan himpunan dominasi jarak dua dari graf G. S_2 didefinisikan sebagai subset dari $V(G)$ yang sedemikian hingga titik-titik pada G yang tidak terhubung dengan S_2 memiliki jarak maksimal 2 terhadap S_2. Kardinalitas minimum dari S_2 dinotasikan dengan $\gamma_2(G)$ dan disebut bilangan dominasi. Pada artikel ini, ditentukan bilangan dominasi jarak dua dari hasil operasi *shackle* titik dan sisi pada graf Bipartit lengkap dan graf Tripartit lengkap, yaitu *Shack* $(K_{m,n}, v, k)$ $m \geq 2, n \geq 3$, *Shack* $(K_{m,n}, e, k)$ $m \geq 2, n \geq 3$, *Shack* $(K_{m,n,r}, v, k)$ $m, n, r \geq 2$, dan *Shack* $(K_{m,n,r}, e, k)$ $m, n, r \geq 2$. Implementasi konsep ini digunakan untuk menentukan jumlah minimum pos pangkalan ojek di Kabupaten Jember. Sumbersari, Patrang dan Kaliwates masing-masing direpresentasikan ke dalam graf yaitu $(Sb - Graf)$, $(Pt - Graf)$ dan $(Kl - Graf)$ dengan ketentuan warung atau kedai, persimpangan jalan, dan masjid direpresentasikan sebagai titik dan jarak antar lokasi tersebut digambarkan sebagai sisi. Hasil akhir dari penelitian ini diperoleh jumlah minimum pos pangkalan ojek, yaitu 8 pos (Sumbersari), 7 (Patrang), dan 5 (Kaliwates) dari 169 titik yang tersebar di ketiga Kecamatan tersebut. Dari jumlah tersebut diimplementasikan menggunakan aplikasi ARCGIS yang berbasis SIG (Sistem Informasi Geografis) pada ketiga kecamatan tersebut.

Kata kunci: bilangan dominasi, himpunan dominasi, ojek, shackle, bipartit, tripartit

1. Pendahuluan

Perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi saat ini cukup pesat. Manusia ditutut untuk mengikuti dan menggunakan teknologi yang diciptakan dalam kehidupan sehari-hari. Sehingga dalam bidang pendidikan pun ilmu yang diberikan kepada peserta didik juga harus relevan dengan perkembangan zaman.

Salah satu cabang ilmu pengetahuan matematika yang dalam penerapannya juga berkaitan dengan permasalahan dalam kehidupan sehari-hari. Misalnya, dalam bidang teori graf terdapat topik rute terpendek (*shorthest path*) dan pewarnaan graf (*graph colouring*) digunakan untuk menentukan jadwal dan jalur penerbangan serta penjadwalan produksi pada suatu industri konveksi [1],[2]. Teori Graf secara khusus diartikan sebagai himpunan tidak kosong yang disebut titik dan himpunan boleh kosong yang disebut dengan sisi [3]. Dalam sejarah perkembangan ilmu matematika, topik dominasi mulai dikenal sejak tahun 1950 oleh Hedetniemi dan Laskar, selanjutnya Haynes dkk menjelaskan dalam tulisannya terdapat lebih dari 75 jenis dominasi dan topik- topik lanjutan dalam dominasi yang telah didefinisikan dan diobservasi oleh beberapa peneliti [4]. Contoh penerapan Bilangan Dominasi dari penelitian sebelumnya yaitu penempatan ATM di berbagai tempat supaya minimal tanpa mengurangi efesienya dan dapat dijangkau dengan mudah oleh masyarakat pada suatu wilayah [5]. Penerapan bilangan dominasi ini membuat penempatan ATM, CCTV, Pos polisi, dan mobil listrik akan lebih efisien dan meminimalisir jumlahnya. Penelitian sejenis terkait penerapan teori bilangan dominasi dapat dilihat pada penelitian [6], [7], [8], [9].

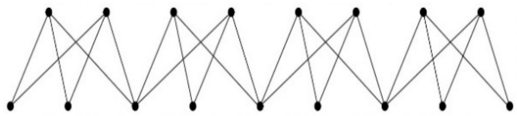
Topik dominasi dalam teori graf mengalami banyak perkembangan. Terdapat berbagai jenis dimoniasi yang menarik untuk diteliti, diantaranya dominasi terhubung (*connected domination*) [10], dominasi total (*total domination*) [11], *power domination* [12], dan lain sebagainya yang dapat dilihat pada [13]. Sejalan dengan topik dominasi, dalam artikel ini diteliti bilangan dominasi jarak dua pada graf bipartit lengkap (*Complete Bipartite Graph*) dan graf tripartit lengkap (*Complete Tripartite Graph*) yang dioperasikan secara *shackle* titik dan *shackle* sisi. Graf hasil operasi *shackle* adalah graf yang terbentuk dari t salinan graf G dan dinotasikan dengan $Shack(G_1, G_2, \dots, G_k)$ dengan $k \geq 2$ dan k adalah bilangan bulat. Operasi ini didefinisikan pada tahun 2010 oleh Maryati, dkk dengan pemberian nama *shackle* karena terinspirasi oleh graf yang terbentuk seperti rangkaian rantai [14]. Himpunan dominasi jarak dua dinotasikan dengan S_2 yaitu subset dari $V(G)$ sedemikian titik pada G bukan elemen S_2 terhubung dan memiliki jarak maksimal 2 terhadap S_2. Bilangan dominasi jarak dua dari suatu graf dinotasikan dengan $\gamma_2(G)$ yaitu kardinilitas minimum dari himpunan dominasi jarak dua [15]. Selain itu, poin penting yang dibahas dalam artikel ini berupa studi kasus untuk menentukan pos pangkalan ojek online menggunakan teori bilangan dominasi jarak dua. Data ojek online yang dipakai yaitu dari perusahaan Gojek sedangkan wilayah yang diteliti meliputi Kecamatan Sumbersari, Kaliwates, dan Patrang di Kabupaten Jember.

Masalah yang sering muncul pada setiap driver ojek adalah pesanan yang tidak menentu setiap harinya bahkan jumlah penumpang terkadang di bawah batas minimum yang diharapkan. Selain itu pemilihan lokasi mangkal terkadang kurang tepat sehingga sering menerima pesanan dengan jarak yang cukup jauh bahkan harus memutar balik menghampiri penumpang yang berbeda jalur. Maka dari itu peneliti mengambil judul Penerapan Teori Bilangan Dominasi Jarak Dua Pada Pemilihan Lokasi Pangkal Ojek Online, sehingga dalam artikel ini ditentukan titik yang berdekatan dengan area Perumahan, Lembaga Pendidikan, Pasar serta Swalayan, kemudian ditemukan titik pendominasi yang dipilih sebagai pos pangkalan ojek dengan jumlah yang minimal, akan tetapi efektif untuk dijadikan sebagai lokasi dalam menunggu pesanan pelanggan. Selanjutnya, titik pendominasi diimplementasikan menggunakan aplikasi ARCGIS yang memuat koordinat titik pendominasi dari pos pangkalan ojek di ketiga Kecamatan tersebut.

2. Metode

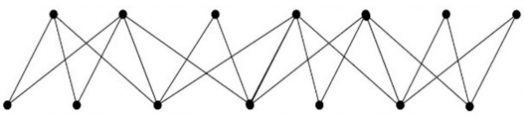
Penelitian ini menerapkan metode pendeteksian pola serta deduktif aksiomatik yang secara umum menghasilkan teorema dan dibuktikan secara matematis. Graf yang digunakan dalam penelitian ini merupakan graf hasil operasi *shackle*. Objek penelitian dalam artikel inimerupakan graf tunggal yang masing-masing dikenakan operasi *shackle* titik (*vertex shackle product*) dan operasi *shackle* sisi (*edge shackle product*). Operasi *shackle* titik dilambangkan $Shack(G, v, t)$ merupakan graf yang dibentuk dari t $-copy$ graf G dengan dipilih sebarang titik v sebagai titik penghubung antar graf G. Sedangkan operasi *shackle* sisi dilambangkan $Shack(G, v, t)$ merupakan graf yang dibentuk dari t $-copy$ graf G dengan dipilih sebarang sisi e sebagai sisi penghubung antar graf G. Berikut diberikan contoh-contoh graf dengan operasi *shackle* titik dan sisi yang diteliti dalam artikel ini.

a. *Shack* $(K_{m,n}, v, k)$ merupakan graf operasi *shackle titik* pada graf bipartit lengkap $(K_{m,n})$ dengan titik (v) sebagai titik penghubung (*linkage vertex*) sebanyak k-salinan graf bipartite lengkap. Berikut contoh gambar graf operasi *shackle* titik pada graf bipartit lengkap $(K_{2,3}, v, 4)$.



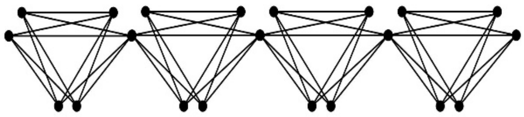
Gambar 1. Graf Shack Bipartit Lengkap $\boldsymbol{Shack(K_{2,3}, v, 4)}$

b. *Shack* $(K_{m,n}, e, k)$ merupakan graf operasi *shackle* sisi pada graf bipartit lengkap $(K_{m,n})$ dengan sisi (e) sebagai sisi penghubung (*linkage edge*) sebanyak *k-copy* graf bipartite lengkap. Berikut contoh gambar graf operasi *shackle* sisi pada graf bipartit lengkap $(K_{2,3}, e, 4)$.



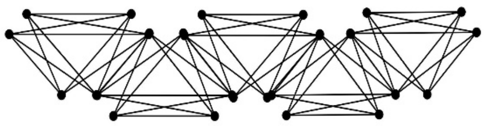
Gambar 2. Graf Shack Bipartit Lengkap $\boldsymbol{Shack(K_{2,3}, e, 4)}$

c. *Shack* $(K_{m,n,r}, v, k)$ merupakan graf operasi *shackle* titik pada graf tripartit lengkap $(K_{m,n,r})$ dengan titik (v) sebagai penghubung (*linkage vertex*) sebanyak k-salinan graf tipartit lengkap. Berikut contoh gambar graf operasi *shackle* titik pada graf tripartit lengkap $(K_{2,2,2}, v, 4)$.



Gambar 3. Graf Tripartit lengkap $\boldsymbol{Shack\ (K_{2,2,2}, v, 4)}$

d. *Shack* $(K_{m,n,r}, e, k)$ merupakan hasil dari graf operasi *shackle* pada graf kubus $(K_{m,n,r})$ dengan subgraf pada sisi (e) sebagai penghubung sebanyak K-salinan. Berikut contoh gambar graf operasi *shackle* sisi pada graf tripartit lengkap.



Gambar 3. Graf Tripartit Lengkap $\boldsymbol{Shack\ (K_{2,2,2}, e, 4)}$

e. Peta Kecamatan Sumbersari, Kaliwates, dan Patrang di Kabupaten Jember akan direpresentasikan sebagai graf dengan memetakkan kedai atau warung, persimpangan jalan, dan masjid sebagai titik, dan jalan antara pos satu dan lainya direpresentasikan sebagai sisi. Aplikasi bilangan dominasi jarak dua penentuan suatu titik sebagai posisi pos pangkalan ojek yang dapat mendominasi titik-titik di sekitarnya dengan jarak maksimal dua dan jumlah pos pangkalan ojek yang digunakan seminimal mungkin yang ditempatkan di tempat yang strategis untuk tempat mangkal bagi driver ojek.

f. Setelah ditemukan titik pendominasinya selanjutnya akan diimplementasikan menggunakan aplikasi ARCGIS yang berbasis SIG (Sistem Informasi Geografis) yang mana aplikasi ini memuat deskripsi atau atribut seperti nama warung atau kedai, masjid serta koordinat.

3. Pembahasan

Berdasarkan uraian pada metode penelitian, sebelum membahas penerapan teori bilangan dominasi pada pemilihan pos pangkalan ojek, berikut dijelaskan bilangan dominasi jarak dua pada graf tipartit lengkap dan graf bipartit lengkap serta pembuktian masing-masing teorema secara matematis.

3.1 Graf Bipartit Lengkap

Teorema yang pertama menampilkan bilangan dominasi jarak dua pada graf bipartit yang dikenakan operasi *shackle* titik sebanyak *k-copy.*

Teorema 1. *Jika* $K_{m,n}$ adalah graf bipartit lengkap dengan order $m+n$, *maka bilangan dominasi jarak dua pada graf hasil operasi Shackle titik sebanyak k salinan adalah*

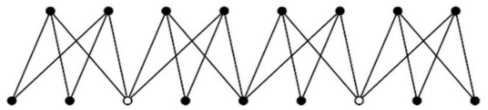
$\gamma_2\,Shack\ \left(K_{m,n}, v, k\right) = \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil,\ m\ \geq\ 2, n\ \geq\ 3$

Bukti. Graf $(K_{m,n})$ merupakan graf Bipartit lengkap dengan $m+n$ titik dan *diam* $\left(K_{m,n}\right) = 2$. *Shack* $\left(K_{m,n}, v_i, k\right)$ adalah graf operasi *shackle* titik dari graf bipartit lengkap $(K_{m,n})$ sebanyak *k-copy* dan v sebagai penyambung titik *(lingkage vertex)*. Sehingga untuk setiap dua *copy* graf $(K_{m,n})$ yang dikenakan operasi *shackle* titik diameternya adalah empat. Dengan demikian, $\gamma_2\ \left(K_{m,n}, v, 2\right)\ \leq\ 2$. Akan tetapi jika titik pendominasi elemen *lingkage vertex* maka $\gamma_2\ \left(K_{m,n}, v, 2\right)\ \leq\ 1$. Sehingga S_2 akan minimal jika S_2 elemen *Lingkage vertex***.** Maka untuk setiap empat salinan graf $(K_{m,n})$ dibutuhkan 2 titik pendominasi, sehingga untuk k salinan *Shack* $\left(K_{m,n}, vi, \mathrm{k}\right)$dibutuhkan $\left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil$ titik pendominasi atau $\gamma_2\ \left(K_{m,n}, v, \mathrm{k}\right)\ \leq \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil$

Andai $\left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil$ bukan titik yang mendominasi dengan kardinalitas minimal, asumsikan $\left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil - 1$ sebagai titik yang mendominasi dengan kardinalitas minimal maka banyaknya titik yang terdominasi adalah

$$2k\left(\left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil - 1\right) \leq\ 2k\ \left(\frac{\mathrm{k}+2k-1}{2k} - 1\right)$$
$$= k-1$$

Karena kardinalitas maksimum titik yang dapat didominasi hanya sejumlah $k-1$ *copy* maka ada maksimal 1 salinan graf yang belum terdominasi. Oleh karena itu γ_2 $\left(K_{m,n}, v, \mathrm{k}\right) \geq\ \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil - 1$ karena γ_2 $\left(K_{m,n}, v, \mathrm{k}\right) \leq\ \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil$ dan $\gamma_2\ \left(K_{m,n}, v, \mathrm{k}\right) \geq \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil$ maka terbukti $\gamma_2\ \left(K_{m,n}, v, \mathrm{k}\right) =\ \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil$□



Gambar 5. Graf Bipartit Lengkap dengan γ_2 (*Shack* $\left(K_{2,3,} v_{i,} 4\right)$)= 2

Pada Gambar 5 dapat dilihat bahwa dari 4 salinan graf bipartit lengkap yang dioperasikan *shackle* titik diperoleh 2 titik sebagai pendominasi jarak dua, yaitu titik-titik yang berwarna putih.

Selanjutnya untuk Teorema 2 berikut ini disajikan bilangan dominasi jarak dua pada graf bipartit lengkap yang dioperasikan *shackle* sisi sebanyak k salinan.

Teorema 2. *Jika* $K_{m,n}$ adalah graf bipartit lengkap dengan order $m+n$, *maka bilangan dominasi jarak dua pada graf hasil operasi Shackle sisi sebanyak k salinan adalah*

$\gamma_2\ Shack\left(K_{m,n}, e, \mathrm{k}\right) \left\lfloor \frac{k}{3} \right\rfloor + 1, m\ \geq\ 2, n\ \geq\ 3$

Bukti. Graf $(K_{m,n})$ merupakan graf Bipartit lengkap dengan $m+n$ titik dan *diam* $\left(K_{m,n}\right) = 2$, maka untuk setiap dua *copy* graf $(K_{m,n})$ yang dikenakan operasi *Shackle* sisi memiliki diameter yaitu empat. Dengan demikian, γ_2 $\left(K_{m,n}, e, \mathrm{k}\right)\ \leq\ 2$. Akan tetapi jika titik pendominasi elemen yang terhubung dengan *linkage edge* $\gamma_2\ \left(K_{m,n}, e, \mathrm{k}\right)\ \leq\ 1$. Maka dari itu untuk setiap empat salinan graf $(K_{m,n})$ dibutuhkan 2 titik yang dapat mendominasi, maka untuk k *copy* graf $K_{m,n}$ atau *Shack*

$(K_{m,n}, e_i, k)$ dibutuhkan $\left\lfloor\frac{k}{3}\right\rfloor + 1$ titik pendominasi.

Berdasarkan hasil observasi bilangan dominasi untuk masing-masing salinan graf bipartit *shackle* sisi yaitu sebagai berikut

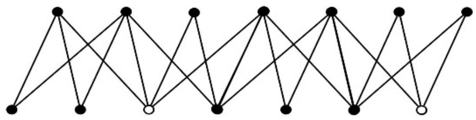
$$k = 2 \rightarrow \gamma_2 = 1$$
$$k = 3 \rightarrow \gamma_2 = 2$$
$$k = 4 \rightarrow \gamma_2 = 2$$
$$k = 5 \rightarrow \gamma_2 = 2$$
$$k = 6 \rightarrow \gamma_2 = 3$$
$$k = 7 \rightarrow \gamma_2 = 3$$
$$k = 8 \rightarrow \gamma_2 = 3$$

Sehingga dari observasi di atas didapatkan nilai batas atas bilangan dominasi jarak dua pada graf bipartit yang dikenakan operasi *shackle* sisi yaitu γ_2 $(K_{m,n}, e, \mathrm{k}) \leq \left\lfloor\frac{k}{3}\right\rfloor + 1$.

Berikut akan ditunjukan bahwa $\left\lfloor\frac{k}{3}\right\rfloor +$ 1 adalah titik pendominasi yang minimal. Misal γ_2 $(K_{m,n}, e, \mathrm{k}) = \left\lfloor\frac{k}{3}\right\rfloor$ sehingga banyaknya titik yang dapat didominasi adalah.

$$3k\left(\left\lfloor\frac{k}{3}\right\rfloor\right) \leq 3k\left(\frac{\mathrm{k} + 3k - 1}{3k}\right) = k$$

Dengan demikian $\left\lfloor\frac{k}{3}\right\rfloor$ bukanlah titik pendominasi yang minimal karena γ_2 $(K_{m,n}, e, \mathrm{k}) \neq \left\lfloor\frac{k}{3}\right\rfloor (K_{m,n}, e, \mathrm{k}) \geq \left\lfloor\frac{k}{3}\right\rfloor + 1$ titik-titik pada graf yang terdominasi lebih dari sama dengan k. Maka $\left\lfloor\frac{k}{3}\right\rfloor + 1$ adalah jumlah titik pendominasi yang minimal. □



Gambar 6. Graf Bipartit Lengkap dengan γ_2 (*Shack* $(K_{2,3,} e_{i,} 4)$)= 2

Gambar 6 menyajikan hasil untuk graf bipartit lengkap $K_{2,3}$ yang dioperasikan *shackle* sisi sebanyak 4 salinan memiliki titik pendominasi jarak dua yaitu 2 (titik yang berwarna putih).

3.2 Graf Tripartit Lengkap

Seperti halnya pada bagian 3.1, graf tripartit yang dibahas pada bagian ini juga dibagi menjadi 2 teorema. Karena graf yang dioperasikan secara *shackle* titik dan *shackle* sisi tentu menghasilkan dua graf yang berbeda sehingga masing-masing graf hasil operasi *shackle* titik dan *shackle* sisi dikaji bilangan dominasi jarak duanya.

Teorema 3. *Jika* $K_{m,n,r}$ adalah graf tripartit lengkap dengan order $m + n + r$, *maka bilangan dominasi jarak dua pada graf hasil operasi Shackle titik sebanyak k salinan adalah*

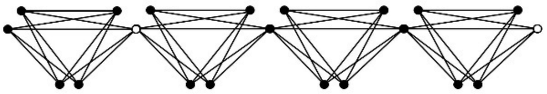
$$\gamma_2\ Shack\ \left(K_{m,n,r}, v, k\right) = \left\lceil\frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{2}}\right\rceil, m, n, r \geq 2$$

Bukti. merupakan graf Tripartit lengkap dengan $m + n + r$ titik dan *diam* $(K_{m,n,r}) = 2$. Dengan demikan, untuk setiap dua *copy* graf $(K_{m,n})$ yang dioperasikan *Shackle* titik memiliki diameter yaitu tiga. Maka, γ_2 $(K_{m,n,r}, v, \mathrm{k}) \leq 2$. Akan tetapi jika titik pendominasi elemen *lingkage vertex* maka γ_2 $(K_{m,n,r}, v, \mathrm{k}) \leq 1$. Sehingga S_2 akan minimal jika S_2 elemen *Lingkage vertex***.** Maka dari itu untuk setiap empat *copy* graf $K_{m,n,r}$ memerlukan 2 titik yang dapat mendominasi, sehingga untuk k *copy* graf $K_{m,n,r}$ atau *Shack* $(K_{m,n,r}, v_i, k)$ memerlukan $\left\lceil\frac{k}{2}\right\rceil$ titik sebagai elemen himpunan dominasi, dengan kata lain γ_2 $(K_{m,n,r}, v, \mathrm{k}) \leq \left\lceil\frac{k}{2}\right\rceil$. □

Berikutnya akan dibuktikan bahwa $\left\lceil\frac{k}{2}\right\rceil$ adalah himpunan dominasi dengan kardinalitas minimal yang dapat mendominasi titik-titik pada *Shack* $((K_{m,n,r}, v_{i,} \mathrm{k})$ dengan *diam* $(K_{m,n,r}) = 1$. Andaikan γ_2(*Shack* $((K_{m,n,r}, vi, \mathrm{k})$ $\left\lceil\frac{k}{2}\right\rceil$-1, maka kardinalitas maksimal dari graf tersebut yang dapat didominasi sampai jarak dua yaitu

$$2k\left(\left\lceil\frac{k}{2}\right\rceil - 1\right) \leq 2k\left(\frac{\mathrm{k} + 2k - 1}{2k} - 1\right)$$
$$= k - 1$$

Dengan demikian kardinalitas maksimal dari *copy*-an graf $K_{m,n,r}$ yang dapat didominasi adalah $k-1$ salinan. Maka dari itu, terdapat maksimal 1 salinan graf yang belum terdominiasi, sehingga $\gamma_2(Shack\ ((K_{m,n,r}, v_{i,}\mathrm{k})) \neq \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil$-1 dan $\left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil$ adalah jumlah titik pendominasi minimal yang mendominasi seluruh titik $Shack(K_{m,n,r}, v_{i,}\mathrm{k})\ \gamma_2 \geq \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil$ Terbukti bahwa $\gamma_2(Shack(K_{m,n,r}, v_{i,}\mathrm{k})) = \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil$. □



Gambar 7. Graf Tripartit Lengkap dengan γ_2 (*Shack* $(K_{2,2,2,}v_{i,}4)$)= 2

Gambar 7 menampilkan hasil untuk graf tripartit lengkap $\boldsymbol{K_{2,2,2}}$ yang dioperasikan *shackle* titik sebanyak 4 salinan memiliki titik pendominasi jarak dua yaitu 2 (titik yang berwarna putih). Berikutnya diteliti pula bilangan dominasi jarak dua pada graf tripartit lengkap yang dioperasikan *shackle* sisi seperti yang disajikan pada Teorema 4 berikut ini.

Teorema 4. *Jika* $K_{m,n,r}$ adalah graf bipartit lengkap dengan order $m+n$, *maka bilangan dominasi jarak dua pada graf hasil operasi Shackle sisi sebanyak k salinan adalah*

$\gamma_2\ Shack\ \ (K_{m,n,r}, e, k) = \left\lceil \frac{k}{3} \right\rceil, m, n, r \geq 2$

Bukti. Masing-masing dua *copy* graf $(K_{m,n,r})$ yang dikenakan operasi *Shackle* sisi memiliki diameter yaitu dua.

$$diam\ (shackle\ (K_{m,n,r}, e, 1)) = 2 \rightarrow \gamma_2 = 1$$

$$diam\ (shackle\ (K_{m,n,r}, e, 2)) = 3 \rightarrow \gamma_2 = 1$$

$$diam\ (shackle\ (K_{m,n,r}, e, 3)) = 4 \rightarrow \gamma_2 = 2$$

$$diam\ (shackle\ (K_{m,n,r}, e, 4)) = 5 \rightarrow \gamma_2 = 2$$

$$diam\ (shackle\ (K_{m,n,r}, e, 5)) = 6 \rightarrow \gamma_2 = 2$$

$$diam\ (shackle\ (K_{m,n,r}, e, 6)) = 7 \rightarrow \gamma_2 = 3$$

$$diam\ (shackle\ (K_{m,n,r}, e, 7)) = 8 \rightarrow \gamma_2 = 3$$

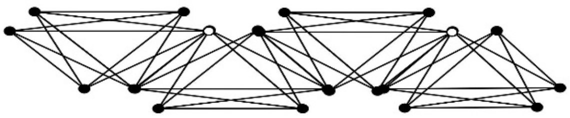
$$diam\ (shackle\ (K_{m,n,r}, e, 8)) = 9 \rightarrow \gamma_2 = 3$$

Sehingga, untuk setiap empat salinan graf $K_{m,n,r}$ dibutuhkan 2 titik pendominasi $\gamma_2 \leq \left\lceil \frac{k}{3} \right\rceil$, oleh karena itu untuk k salinan graf $(K_{m,n,r})$ *Shack* $(K_{m,n,r}, ei, k)$ dibutuhkan $\left\lceil \frac{k}{3} \right\rceil$titik pendominasi.

Misalnya $\left\lceil \frac{k}{3} \right\rceil$ bukan jumlah titik pendominasi yang minimal. Asumsikan γ_2 (*Shack* $((K_{m,n,r,}ei_{,}\mathrm{k})\ \left\lceil \frac{k}{3} \right\rceil$-1 sebagai titik yang mendominasi dengan kardinalitas minimal. Maka kardinalitas titik yang terdominasi adalah

$$3k\left(\left\lceil \frac{k}{3} \right\rceil - 1\right) \leq 3k\left(\frac{\mathrm{k} + 3k - 1}{3k} - 1\right)$$
$$= k - 1$$

Karena banyaknya titik yang terdominasi hanya $k-1$ *copy*, maka dapat disimpulkan bahwa ada maksimal 1 *copy* graf yang belum terdominasi. Sehingga γ_2 (*Shack* $(K_{m,n,r,}e_{i_,}\mathrm{k}))) \neq \left\lceil \frac{k}{3} \right\rceil$ -1. Maka dari itu, $\left\lceil \frac{k}{3} \right\rceil$ adalah titik pendominasi yang minimal. □

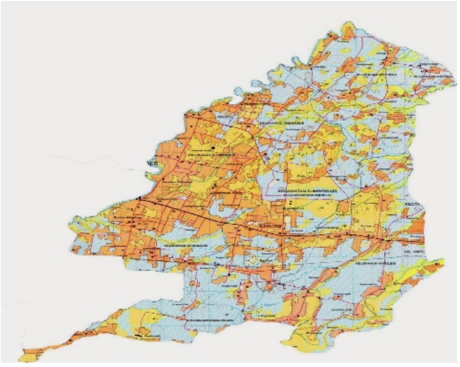


Gambar 8. Graf Tripartit Lengkap dengan γ_2 (*Shack* $(K_{2,2,2,}e_{i,}4)$)= 2

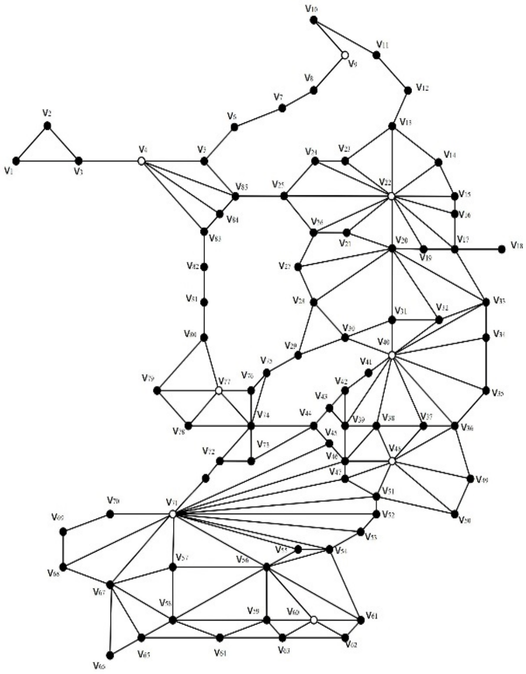
Graf tripartit lengkap $K_{2,2,2}$ dengan operasi shackle sisi sebanyak 4 salinan memiliki bilangan dominasi jarak dua yaitu 2 seperti yang ditampilkan pada Gambar 8, yaitu titik-titik yang berwarna putih adalah titik pendominasi jarak dua.

3.3 Studi Kasus Bilangan Dominasi Jarak Dua pada Pemilihan Lokasi Pangkal Ojek Online

Pada bagian ini dibahas mengenai bilangan dominasi jarak dua pada graf peta Kecamatan Sumbersari, Patrang, dan Kaliwates yang terletak di Kabupaten Jember. Peta ketiga Kecamatan dapat dilihat pada Gambar 9, Gambar 11 dan Gambar 13. Sedangkan masing representasi peta ke dalam bentuk graf dapat dilihat pada Gambar 10, Gambar 12 dan Gambar 14.



Gambar 9. Peta Kecamatan Sumbersari



Gambar 10. Sb-graf

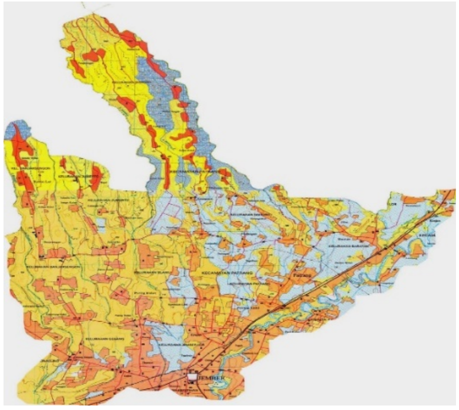
Penentuan titik dan sisi pada graf peta ketiga kecamatan tersebut berdasarkan aturan berikut ini.

a. Titik merupakan kedai (warung), masjid, pasar dan persimpangan jalan.
b. Sisi merupakan jalan yang menghubungkan antar lokasi yang terpilih sebagai titik.

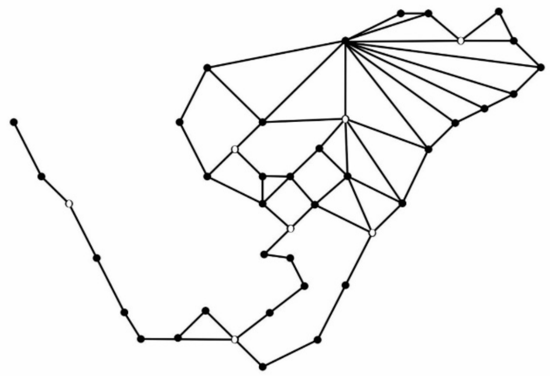
Untuk mempermudah penyebutan wilayah masing-masing kecamatan, maka diberikan nama-nama graf berikut:

- $Sb - Graf$: graf kecamatan Sumbersari
- $Pt - Graf$: graf kecamatan Patran
- $Kl - Graf$: graf kecamatan Kaliwates.

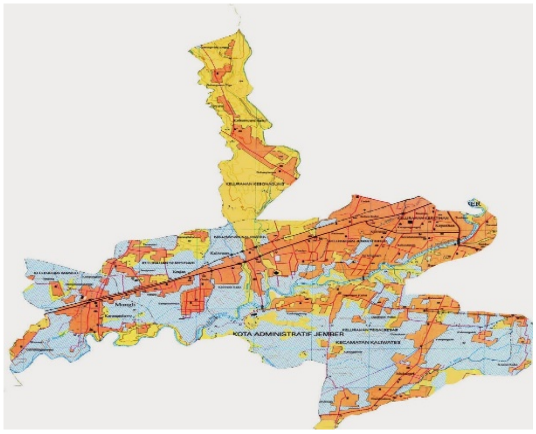
Selanjutnya dari masing-masing graf yang terbentuk diteliti jumlah himpunan dominasi jarak dua yang minimal yang ditunjuk sebagai lokasi pos pangkal ojek yang strategis. Bilangan dominasi jarak dua diperoleh berdasarkan teori seperti yang digunakan untuk mengamati bilangan dominasi jarak dua pada graf-graf yang diteliti pada poin 3.1 dan 3.2.



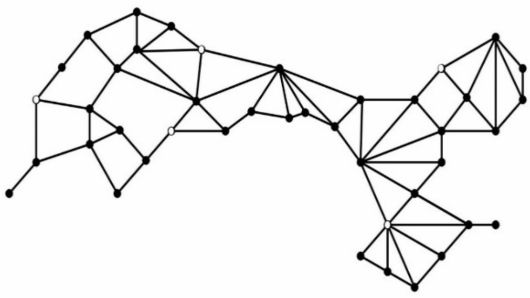
Gambar 11. Peta Kecamatan Patrang



Gambar 12. Pt-Graf



Gambar 13. Peta Kecamatan Kaliwates



Gambar 14. Kl-Graf

Berdasarkan analisis terhadap masing-masing graf diperoleh bilangan dominasi jarak dua untuk masing-masing graf adalah:

$$\gamma_2(Sb - Graf) = 8$$
$$\gamma_2(Pt - Graf) = 7$$
$$\gamma_2(Kl - Graf) = 3$$

Sehingga total keseluruhan untuk 3 graf peta kecamatan adalah memiliki 20 bilangan dominasi jarak dua. Dengan kata lain pada ketiga kecamatan tersebut sebanyak 20 lokasi direkomendasikan sebagai pos pangkalan ojek yang strategis.

Pengamatan pada titik-titik yang dapat mendominasi titik lainnya yang terhubung dengan jarak maksimal dua. Titik-titik pendominasi merupakan titik yang bewarna putih yang dijadikan lokasi pos pangkal ojek online seperti yang dapat dilihat pada Gambar 10, Gambar 12, dan Gambar 14.

Menurut [16] bahwa untuk menentukan batas bawah dan batas atas bilangan dominasi adalah dengan melihat batas berikut ini

$$\left\lceil \frac{p}{1 + \Delta(G)} \right\rceil \leq \gamma(G) \leq p - \Delta(G)$$

Pada graf Kecamatan Sumbersari, Patrang, dan Kaliwates terdapat 169 titik dengan derajat maksimal $\Delta\,(Sb - Graf,\ Pt - Graf, Kl - Graf)$ adalah 12. Oleh karena itu, bilangan dominasi jarak dua sesuai dengan batas tersebut yaitu $21 \leq \gamma_2\,(Sb - Graf,\ Pt - Graf, Kl - Graf\,) \leq 157$.

Gambar 15. Peta Kecamatan Sumbersari, Kaliwates, dan Patrang dengan titik pendominasi pada aplikasi ARCGIS

Implementasi hasil penelitian bilangan dominasi selanjutnya menggunakan aplikasi ARCGIS yang memuat sebuah peta, koordinat beserta nama pos pangkalan ojek yang terdapat di Kecamatan Sumbersari, Patrang, dan Kaliwates yang menjadi titik pendominasi, seperti pada Gambar 15.

4. Penutup

Berdasarkan pembahasan pada bagian sebelumnya, diperoleh kesimpulan sebagai berikut.

a. Bilangan dominasi jarak dua graf hasil operasi *shackle* titik dan *shackle* sisi pada graf bipartit lengkap adalah

$$\gamma_2\left(Shack(K_{m,n}, v, \mathrm{k})\right) = \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil, m \geq 2, n \geq 3$$
$$\gamma_2\left(Shack(K_{m,n}, e, \mathrm{k})\right) = \left\lfloor \frac{k}{3} \right\rfloor + 1,\ m \geq 2, n \geq 3$$

b. Bilangan dominasi jarak dua graf hasil operasi *shackle* titik dan *shackle* sisi pada graf tripartit lengkap adalah

$$\gamma_2\left(Shack(K_{m,n,r}, v, \mathrm{k})\right) = \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil, m, n, r \geq 2$$
$$\gamma_2\left(Shack(K_{m,n,r}, e, \mathrm{k})\right) = \left\lceil \frac{\boldsymbol{k}}{\mathbf{3}} \right\rceil, m, n, r \geq 2$$

Pada tiga kecamatan di kapubaten Jember diperoleh sebanyak 20 lokasi direkomendasikan sebagai pos pangkalan ojek yang strategis dengan rincian masing-masing bilangan dominasi jarak dua pada ketiga kecamatan tersebut yang telah direpresentasikan dalam graf adalah

$$\gamma_2(Sb - Graf) = 8, \gamma_2(Pt - Graf) = 7$$
$$\text{dan } \gamma_2(Kl - Graf) = 3.$$

Referensi

[1] H. Ghassani and S. Teknik, “Aplikasi Graf pada Penentuan Jadwal dan Jalur Penerbangan,” no. c, 2016.

[2] A. Juniar, “Penerapan Algoritma Greedy pada Penjadwalan Produksi Single-Stage dengan Parallel Machine di Industri Konveksi,” vol. 16, no. 2, pp. 175–184, 2015.

[3] R. P. Adirasari, H. Suprajitno, and L. Susilowati, “The dominant metric dimension of corona product graphs,” *Baghdad Sci. J.*, vol. 18, no. 2, pp. 349–356, 2021, doi: 10.21123/BSJ.2021.18.2.0349.

[4] T. W. Haynes, S. Hedetniemi, and P. J.

Slater, "Fundamentals of Domination in Graphs A Series of Monographs and Textbooks on Pure and Applied Mathematics." 1998.

[5] I. Saifudin and R. Umilasari, "Penempatan Anjungan Tunai Mandiri (ATM) pada Kecamatan Sumbersari Kabupaten Jember Menggunakan Teori Bilangan Dominasi," *Justindo*, pp. 112–120, 2017.

[6] R. Umilasari, I. Saifudin, and R. F. Azhar, "Optimasi Penempatan Petugas Keamanan Di Taman Safari Prigen Pasuruan Menggunakan Teori Himpunan Dominasi," *JUSTINDO (Jurnal Sist. dan Teknol. Inf. Indones.*, vol. 4, no. 2, p. 36, 2019, doi: 10.32528/justindo.v4i2.2613.

[7] R. Umilasari and I. Saifudin, "Determination of bulog regional sub-division in east java using connected domination number theory," *J. Phys. Conf. Ser.*, vol. 2157, no. 1, 2022, doi: 10.1088/1742-6596/2157/1/012009.

[8] T. B. Dominasi, "1 penempatan server center pada kabupaten jember menggunakan teori bilangan dominasi 1)," no. 1510651084, pp. 1–8.

[9] S. Bahadir, "An algorithm to check the equality of total domination number and double of domination number in graphs," *Turkish J. Math.*, vol. 44, no. 5, 2020, doi: 10.3906/mat-2001-58.

[10] W. Duckworth and B. Mans, "Connected domination of regular graphs $," *Discrete Math.*, vol. 309, no. 8, pp. 2305–2322, 2009, doi: 10.1016/j.disc.2008.05.029.

[11] B. Bresar *et al.*, "On Grundy Total Domination Number in Product Graphs," *Discuss. Math. - Graph Theory*, vol. 41, no. 1, 2021, doi: 10.7151/dmgt.2184.

[12] K. M. Koh and K. W. Soh, "On the power domination number of the Cartesian product of graphs," *AKCE Int. J. Graphs Comb.*, vol. 16, no. 3, pp. 253–257, 2019, doi: 10.1016/j.akcej.2019.02.004.

[13] L. Kang, "Variations of Dominating Set Problem," in *Handbook of Combinatorial Optimization*, P. M. Pardalos, D.-Z. Du, and R. L. Graham, Eds. New York, NY: Springer New York, 2013, pp. 3363–3394.

[14] T. K. Maryati, A. N. M. Salman, E. T. Baskoro, and J. Ryan, "On H-supermagic labelings for certain shackles and amalgamations of a connected graph On H -supermagic labelings for certain shackles and amalgamations of a connected graph," no. November, 2010.

[15] R. Umilasari and D. Darmaji, "Dominating number of distance two of corona products of graphs," *Indones. J. Comb.*, vol. 1, no. 1, p. 41, 2016, doi: 10.19184/ijc.2016.1.1.5.

[16] 2014 Ika Hesti Agustin, "Abstrak Dan Executive Summary Penelitian Dosen Pemula Penerapan Teori Dominating Set Dalam Instalasi Client Hub Untuk Jaringan," 2014.